ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 29 MAI 1922.

PRÉSIDENCE DE M. ALBIN HALLER.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce à l'Académie qu'en raison des fêtes de la Pentecôte, la prochaine séance hebdomadaire aura lieu le mardi 6 juin au lieu du lundi 5.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Mourelo**, professeur à l'Université de Madrid, et au Dr **Richard Bishop Moore**, chimiste en chef du Bureau des Mines des États-Unis, qui assistent à la séance.

M. le **Président** s'exprime en ces termes :

A la liste funèbre de nos disparus de cette année, nous avons le douloureux regret d'ajouter le nom de l'éminent industriel, du grand philanthrope, M. **Ernest Solvay**, qui vient de mourir à l'âge de 84 ans. Né à Rebecq-Rognon, en Belgique, notre confrère a eu la carrière la mieux remplie et la plus féconde qu'un homme d'action puisse souhaiter. C'est dans une usine à gaz, dirigée par un de ses oncles, qu'il entreprit ses premières recherches sur la fabrication de la soude à l'ammoniaque. Mieux favorisé par les circonstances que nos compatriotes Th. Schlœsing et Rolland, qui poursuivaient le même problème, il a réussi, en collaboration avec son frère Alfred Solvay, à asseoir sur des bases solides, parce que scientifiques, cette fabrication, un des tronçons les plus importants de la grande industrie chimique. Il a mis dans cette œuvre une énergie et une ténacité qualifiées par lui-même, dans sa modestie, « d'entêtements industriels de sa jeunesse », et qu'on pourrait donner en exemple à bien des débutants.

La lutte entre le nouveau procédé et l'ancien, en l'espèce, le procédé Le Blanc, fut longue et âpre, mais la victoire appartint, et appartiendra toujours, aux procédés à meilleurs rendements et à exploitation plus économique, malgré les perturbations momentanées qu'ils introduisent dans la production générale.

A partir du moment où le succès vint couronner ses efforts, M. Ernest Solvay, désormais libéré de tout souci matériel, se consacra à des études d'ordre social et économique.

Les problèmes qu'il souleva et les solutions qu'il préconisa dans ce domaine si complexe de l'exploitation industrielle et commerciale, sont tous marqués au coin de l'esprit le plus positif et le plus généreux. Il a consigné dans deux opuscules parus sous les noms de *Principes d'orientation sociale* et de *Questions d'énergétique sociale*, la plupart des articles qu'il a publiés sur ces captivants sujets.

Estimant qu'une partie de la fortune acquise devait servir à des améliorations sociales et à des encouragements à la science, il créa plusieurs Instituts à l'Université de Bruxelles, et dota largement les Instituts de Chimie et d'Électrotechnique de Nancy, ainsi que l'Institut de Chimie appliquée de l'Université de Paris.

Sa dernière création ne fut pas la moins originale ni la moins réussie. Il s'agit de ces Instituts internationaux de Physique et de Chimie où périodiquement, tous les trois ans, il réunissait pendant huit jours, dans un des établissements du parc Léopold dépendant de l'Université, des savants de différents pays dans le but de « discuter et de fixer une série de points controversés des théories physiques et chimiques modernes ».

Bien que déprimé par la lutte constante qu'il eut à soutenir, pendant quatre ans, comme Président du Comité de ravitaillement belge, contre un ennemi barbare et implacable, il nous convoqua il y a un mois à peine, dans un de ces congrès privés, où entre confrères de pays alliés et neutres, nous abordâmes les questions de Physico-Chimie et de Chimie qui passionnent depuis quelques années les chercheurs et tout le monde pensant.

M. Ernest Solvay avait une foi profonde dans l'action civilisatrice de la science, et accueillait avec faveur toute suggestion, toute requête introduite dans un but de propagande et de production scientifique.

Aussi sa déconvenue fut-elle grande quand, en 1914, il prit connaissance du manifeste des 93 approuvant l'envahissement de son pays et excusant les atrocités que les hordes allemandes y avaient commises et continuaient à y commettre. Patriote ardent et convaincu, il ne parlait de ces heures tra-

giques que d'une voix frémissante où perçaient sa désillusion et sa mésestime à l'égard des ennemis de son pays.

Belle et noble figure de l'industrie contemporaine, M. Ernest Solvay laissera un souvenir impérissable, non seulement comme industriel novateur, mais encore comme sociologue, comme philanthrope, et comme bienfaiteur de l'intellectualité à tous les degrés.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la végétation dans des milieux pauvres en oxygène.* Note de MM. **L. Maquenne** et **E. Demoussy.**

Nous avons déjà insisté sur ce fait que les plantes peuvent se contenter pour vivre d'une très petite quantité d'oxygène, celle par exemple qui se trouve en dissolution dans l'eau ou que la fonction chlorophyllienne dégage, pendant le jour, de l'acide carbonique émis par la respiration nocturne [1]. Nos recherches ultérieures nous ont fait voir que cette faculté est d'ordre très général, qu'elle s'exerce dès la germination des grains et se poursuit même, à la lumière, chez les plantes terrestres que l'on maintient immergées ou que l'on conserve dans le vide. Il en résulte, comme on va le voir, quelques conséquences nouvelles et assez imprévues.

I. *Évolution des graines immergées.* — On sait depuis plus de 40 ans que les graines peuvent germer dans l'eau courante quand celle-ci est convenablement aérée; l'expérience ne réussit d'ailleurs qu'avec les graines de petites dimensions, dont la surface relativement grande, par rapport à leur volume, permet à l'oxygène dissous de pénétrer jusque dans les profondeurs des réserves en quantité suffisante pour subvenir aux besoins de leur respiration.

A l'aide de l'appareil à circulation continue que nous avons décrit dans la Note précitée nous avons pu faire les mêmes observations en milieu rigoureusement aseptique [2] et, de plus, en prolongeant l'expérience en plein jour, faire évoluer les graines à l'état de plantules d'apparence normale, sauf la petitesse de leurs feuilles, qui s'allongent rapidement, ver-

---

(1) Maquenne et Demoussy, *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 373.

(2) Les germinations se font ainsi aussi vite que sur sable ou sur terre humides. On remarquera d'ailleurs que ce dispositif expérimental permet non seulement d'aérer l'eau d'une façon parfaite, mais encore d'en chasser mécaniquement les produits volatils toxiques qui peuvent s'y former.

dissent et s'orientent dans l'eau, sans s'injecter, comme si elles étaient dans l'air.

Ces plantules, qui peuvent atteindre jusqu'à $0^{m},20$ et $0^{m},30$ de longueur totale, sont bientôt atteintes de chlorose, même dans une solution nutritive (liqueur de Detmer étendue, glucosée ou non), ce qui naturellement met un terme à leur évolution ; elles n'en sont pas moins douées, pendant les quelques semaines que dure leur croissance, d'une capacité d'assimilation qui les rend comparables à une plante normale. Lorsqu'on termine l'expérience on trouve, en effet, si l'on a eu soin d'ajouter à l'air qui circule à travers l'appareil quelques centièmes d'acide carbonique, que le poids de matière sèche ainsi obtenue est supérieur ou au moins égal à celui de la graine primitive. Avec le radis et le colza nous avons pu avoir de cette manière, ainsi que le montre le Tableau suivant, des récoltes pesant respectivement une fois et demie et près de huit fois plus que la semence. C'est la première fois, croyons-nous, qu'on obtient un pareil résultat dans des conditions aussi spéciales, et en même temps la preuve que la petite quantité d'oxygène que l'eau aérée renferme en dissolution suffit, non seulement à faire germer les graines de petit volume jusqu'à épuisement de leurs réserves, mais encore à entretenir la respiration des plantes terrestres immergées aussi bien que celle des plantes aquatiques.

	Durée de l'expérience.	Longueur des racines.	Longueur des tiges ou axes.	Poids des plantules sèches.	Poids de la semence primitive.	Rapport.
		mm	mm	mg	mg	
Pois [1].........	30 jours	280	65	128	128	1,0
Radis...........	14 »	90	35	17	10,3	1,6
Blé [2]..........	25 »	»	»	53	54	1,0
Colza...........	24 »	80	25	18,6	2,5	7,4
» [3]........	15 »	200 (racines et tiges ensemble)		8,8	2,5	3,5

II. *Mouvement des gaz dans la racine des plantes immergées.* — Quand on expose au soleil une jeune plante issue de graine immergée et immergée elle-même dans l'eau saturée d'air et chargée d'acide carbonique, on voit les feuilles émettre de l'oxygène en abondance, ce qui témoigne de leur

(1) Très nombreuses petites feuilles. Cotylédons épuisés.

(2) Grain complètement vide.

(3) La plante s'était étiolée, faute de lumière, pendant les premiers jours de l'expérience.

activité chlorophyllienne, et, en outre, se produire sur la racine, en un ou deux points situés souvent à plus de 10^{cm} du collet, quelquefois même au voisinage de la coiffe terminale, un dégagement de fines bulles gazeuses, toutes semblables à celles qui s'échappent de la tige d'une plante aquatique sectionnée; le phénomène est particulièrement net avec les pois et le colza.

Ce gaz, que nous n'avons pas pu recueillir en quantité suffisante pour en faire l'analyse, n'est sûrement pas de l'acide carbonique, qui, dans ces conditions, ne manquerait pas de se dissoudre dans le liquide ambiant; il ne peut guère être formé non plus d'azote, dont on ne s'expliquerait pas l'origine; c'est donc encore vraisemblablement de l'oxygène. D'ailleurs son dégagement est bien en rapport avec la fonction chlorophyllienne, car on le voit cesser dès qu'on place un écran devant les feuilles pour repartir aussitôt qu'on leur rend la lumière.

Si d'autre part on remarque que le dégagement en question se produit aux points où plus tard il doit apparaître une radicelle, ce qui exige un apport de matériaux plastiques, on est conduit à admettre que les plantes sont le siège d'un mouvement de gaz qui se déplacent à l'intérieur de leurs tissus dans le même sens et suivant le même chemin que la sève nourricière. C'est là un fait, non encore signalé au cours de la végétation normale, qui nous paraît de réelle importance en ce qu'il nous fait connaître un nouveau mode de transport dans la plante d'un élément qui lui est nécessaire.

Il va sans dire que cette émission d'oxygène à la surface des racines ne peut s'effectuer que si ce gaz y arrive en quantité supérieure à celle dont elles ont besoin; c'est pourquoi, dans l'expérience précédente, on ne l'observe que sous de forts éclairements.

Remarquons enfin qu'on peut tirer de là un argument sérieux en faveur de cette idée que l'oxygène chlorophyllien prend naissance à l'extérieur de la cellule assimilatrice, dans la sève même, par décomposition catalytique de quelque peroxyde élaboré comme elle par les chloroplastes, et chassé en même temps qu'elle dans la circulation libérienne.

III. *Vitalité des feuilles vertes en l'absence d'oxygène.* — Nous avons déjà fait observer (*loc. cit.*) que certaines feuilles, comme celles d'aucuba et de poirier, se conservent intactes pendant plusieurs semaines et même plusieurs mois dans le vide, à la lumière ordinaire du jour. C'est là une propriété qui est loin d'être générale et sur laquelle il est nécessaire d'apporter quelques précisions; elle est, en effet, assujettie à un certain nombre de conditions dont la présente Note a pour objet de définir les plus importantes.

En fait, la durée de conservation des feuilles vertes dans le vide, à la lumière, est extrêmement variable avec leur nature, depuis à peine 24 heures, par exemple, pour l'oseille, dont le jaunissement témoigne d'une altération rapide, jusqu'à plus d'un an pour l'aucuba qui, malgré la facilité avec laquelle il noircit sous la moindre influence abiotique, garde pendant tout ce temps son aspect primitif; il conserve même toutes ses propriétés physiologiques, car une feuille de cette espèce, maintenue sous vide, en tube scellé, en face d'une fenêtre qui ne recevait que la lumière diffuse du jour, depuis le 6 mai 1921 jusqu'au 5 mai 1922, a pu encore décomposer en 6 heures, au soleil, $2^{cm^3},4$ d'acide carbonique. D'un autre tube, renfermant un morceau de feuille d'aucuba d'environ 5^{cm^2} de superficie, mais n'ayant que 6 mois d'âge, on a pu extraire, après insolation, $0^{cm^3},5$ d'oxygène pur (¹), sans trace d'acide carbonique, ce qui est une nouvelle preuve que la fonction chlorophyllienne s'y était accomplie régulièrement. Ajoutons que la même feuille qui, dans l'expérience précitée, avait décomposé plus de 2^{cm^3} de gaz carbonique après un an de conservation, a noirci dans l'espace de deux jours quand on l'a de nouveau soumise au vide, à l'obscurité; c'est donc bien l'influence de la lumière qui l'avait maintenue vivante jusqu'alors.

Entre ces extrêmes il doit y avoir nécessairement une infinité d'intermédiaires qu'il serait fastidieux de rechercher; signalons seulement, parmi les feuilles susceptibles d'une longue conservation, celles du laurier-tin, dont un fragment, gardé sous vide à la lumière, pendant six mois, a décomposé en un jour $0^{cm^3},5$ de gaz carbonique et dégagé la quantité correspondante d'oxygène. Des feuilles de laurier-cerise, de troène et de fusain (très jeunes) étaient, au contraire, mortes peu de temps auparavant.

Les raisons de ces différences sont multiples; il y en a cependant quelques-unes qui sont faciles à saisir. Pour qu'une feuille détachée se conserve dans de pareilles conditions, il faut nécessairement que les matériaux, gazeux ou solides, qu'elle consomme en respirant pendant la nuit soient intégralement régénérés pendant le jour par la fonction chlorophyllienne; en d'autres termes, qu'il ne se forme aucun produit fixe tel que la cellulose; ce seront donc les organes ayant atteint leur maximum de développement qui seuls seront capables de satisfaire à cette condition. Il faut ensuite que la

---

(¹) Le tube en question ayant environ 10^{cm^3} de capacité, l'oxygène s'y trouvait sous une pression de $\frac{5}{100}$ d'atmosphère, soit à peu près le quart de celle qu'il possède dans l'air commun.

feuille renferme une réserve de substance combustible suffisante pour fournir, sans en être affectée, le volume de gaz carbonique, par conséquent d'oxygène, qui lui est nécessaire au début; autrement elle serait frappée d'épuisement, ce qui, comme nous l'avons montré autrefois, est un signe de dégénérescence sénile. Cette condition exige, comme la précédente, que l'organe étudié ait cessé de s'accroître; c'est donc parmi les feuilles adultes et surtout les feuilles persistantes, dont la respiration se maintient à peu près constante dans l'espace d'une nuit, qu'il faut chercher celles qui se conservent le plus longtemps à l'abri de l'air. Le Tableau suivant montre bien, en effet, qu'il existe sous ce rapport une énorme différence entre les feuilles d'oseille et celles d'aucuba. C'est surtout la respiration intracellulaire qui est touchée, à ce point qu'après quelques heures seulement le rapport $\frac{I}{N}$ des deux intensités respiratoires, interne et normale, est devenu presque nul chez l'oseille, alors que chez l'aucuba il n'a perdu qu'une faible fraction de sa valeur primitive ([1]).

	Durée de l'expérience.	CO^2 dégagé par 100g de feuilles en 1 heure. Respiration intracellulaire.	Respiration normale.	Rapport $\frac{I}{N}$
		cm^3	cm^3	
Oseille.	Après 4 heures	6,2	19,1	0,33
	» encore 4 heures	0,7	14,7	0,05
	» encore 16 heures...	0,0	8,0	0,00
Aucuba.	Après 4 heures	27,5	51,5	0,53
	» encore 4 heures....	23,7	47,5	0,50
	» encore 16 heures...	9,7	23,7	0,41

Remarquons enfin que, pour que les deux fonctions adverses de la feuille se compensent exactement, il est nécessaire que le quotient respiratoire $\frac{CO^2}{O}$ soit au moins égal au coefficient chlorophyllien réel, c'est-à-dire égal ou supérieur à 1, ce que nous savons être le cas général pour les organes verts en bon état physiologique.

En résumé, les feuilles sont capables, chez certaines espèces, de conserver leur vitalité en l'absence d'air pendant un temps qui peut être fort

---

([1]) Les intensités des deux respirations, intracellulaire et normale, ont été déterminées simultanément, à la même température, sur des feuilles aussi semblables que possible.

long, puisqu'il arrive à dépasser celui qu'emploient les plantes annuelles à parcourir le cycle entier de leur évolution. C'est là un fait nouveau et inattendu qu'il nous a paru intéressant de signaler : il nous montre que les graines ne sont pas, comme on le croit généralement, les seuls organes qui puissent vivre longtemps encore après qu'on les a séparés de la plante qui les a produits.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les figures intégrales singulières des systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi.* Note [1] de M. **Riquier**.

I. Considérons un système partiel du premier ordre auquel s'applique la méthode de Jacobi généralisée [2], par exemple le système

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x + S_x\dfrac{\partial u}{\partial s} + T_x\dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x + S_x\dfrac{\partial v}{\partial s} + T_x\dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x + S_x\dfrac{\partial w}{\partial s} + T_x\dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y + S_y\dfrac{\partial u}{\partial s} + T_y\dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y + S_y\dfrac{\partial v}{\partial s} + T_y\dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y + S_y\dfrac{\partial w}{\partial s} + T_y\dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z + S_z\dfrac{\partial u}{\partial s} + T_z\dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z + S_z\dfrac{\partial v}{\partial s} + T_z\dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = W_z + S_z\dfrac{\partial w}{\partial s} + T_z\dfrac{\partial w}{\partial t}; \end{cases}$$

dans ces formules, u, v, w désignent des fonctions inconnues de x, y, z, s, t, et

$$(2)\qquad U_x,\ U_y,\ U_z,\ V_x,\ V_y,\ V_z,\ W_x,\ W_y,\ W_z,\ S_x,\ S_y,\ S_z,\ T_x,\ T_y,\ T_z$$

des fonctions connues de x, y, z, s, t, u, v, w, ces dernières satisfaisant aux conditions voulues pour que le système (1) soit *passif*. Cette passivité entraîne d'ailleurs celle du système différentiel total

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial x} = -S_x, & \dfrac{\partial t}{\partial x} = -T_x, & \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} = -S_y, & \dfrac{\partial t}{\partial y} = -T_y, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y, \\ \dfrac{\partial s}{\partial z} = -S_z, & \dfrac{\partial t}{\partial z} = -T_z, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = W_z, \end{cases}$$

où s, t, u, v, w désignent cinq fonctions inconnues de x, y, z.

Considérons maintenant, au lieu du système (3), un système, (3 *bis*)

---

[1] Séance du 15 mai 1922.

[2] Riquier, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 206.

identique à (3) quant à l'écriture, mais où les fonctions inconnues s, t, u, v, w seront supposées dépendre, non plus seulement, comme dans (3), de x, y, z, mais encore de cinq variables adjointes, qui ne figurent dans les équations du système ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation : ce système (3 *bis*) est nécessairement passif comme (3). Désignons ensuite par $x_0, y_0, z_0, s_0, t_0, u_0, v_0, w_0$ des valeurs numériques de x, y, z, s, t, u, v, w n'excédant pas les limites où les fonctions (2) sont toutes analytiques et régulières; par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ les cinq nouvelles variables, adjointes, comme il a été dit, à x, y, z; par

$$(4)\qquad a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma + d_i\delta + l_i\lambda + g_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

cinq fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ à coefficients constants, telles que le déterminant formé avec les coefficients des variables soit différent de zéro; par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \lambda_0$ les valeurs numériques de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ qui vérifient les relations obtenues en égalant respectivement à s_0, t_0, u_0, v_0, w_0 ces cinq fonctions linéaires; et par

$$(5)\qquad \begin{cases} s = \mathcal{S}\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda), \\ t = \mathcal{T}\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda), \\ u = \mathcal{U}\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda), \\ v = \mathcal{V}\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda), \\ w = \mathcal{W}\,(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) \end{cases}$$

la figure intégrale (ordinaire) du système (3 *bis*) déterminée par la condition initiale que, pour $x, y, z = x_0, y_0, z_0$, les inconnues s, t, u, v, w se réduisent respectivement aux fonctions linéaires (4).

Finalement, traçons dans l'espace $[[x, y, z]]$, à partir de (x_0, y_0, z_0), un arc, $\mathcal{A}_{x,y,z}(p, \ldots)$, dépendant d'un groupe d'indéterminées (réelles), $p, \ldots$ [1]; puis, dans l'espace $[[\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda]]$, à partir de $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0, \lambda_0)$, un arc, $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda}(q, \ldots)$, dépendant d'un deuxième groupe d'indéterminées (réelles), $q, \ldots$, qui n'offre aucune indéterminée commune avec le groupe $p, \ldots$: si l'on suppose que l'intégrale (5) du système (3 *bis*) soit calculable par cheminement sur l'arc

$$(6)\qquad [\mathcal{A}_{x,y,z}(p, \ldots),\quad \mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\lambda}(q, \ldots)],$$

le point de l'espace $[[s, t, u, v, w]]$ défini par (5) décrit dans ce chemine-

---

(1) *Loc. cit.*, n° 37.

ment, à partir de $(s_0, t_0, u_0, v_0, w_0)$, un arc, $\mathcal{A}_{s,t,u,v,w}(p, \ldots, q, \ldots)$, qui dépend à la fois des indéterminées $p, \ldots$ et des indéterminées $q, \ldots$.

Cela posé, et *le groupe* $\mathfrak{s}, \mathfrak{T}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ *des fonctions* (5) *étant supposé calculable par cheminement sur l'arc* (6), *pour que le groupe des fonctions* (2) *soit lui-même calculable sur l'arc*

$$[\mathcal{A}_{x,y,z}(p, \ldots), \quad \mathcal{A}_{s,t,u,v,w}(p, \ldots, q, \ldots)],$$

il faut et il suffit que, sur l'arc (6), *le déterminant différentiel* $\frac{\partial(\mathfrak{s}, \mathfrak{T}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)}$ *reste constamment différent de zéro.*

Cette propriété, que l'on peut établir avec une entière rigueur, suggère, pour la recherche des figures intégrales singulières du système (1), telles que nous les avons définies dans une Note antérieure ([1]), un procédé indirect, basé sur la connaissance des formules (5). Adjoignant à ces formules la relation $\frac{\partial(\mathfrak{s}, \mathfrak{T}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)} = 0$, on éliminera entre ces six équations trois des constantes arbitraires, γ, δ, λ par exemple; on obtiendra ainsi, dans un espace à huit dimensions, une famille de figures à cinq dimensions dépendant des indéterminées α, β. On examinera alors si l'attribution à α, β de telles ou telles valeurs convenablement choisies peut fournir des figures intégrales du système (1).

II. Considérons actuellement une figure intégrale (ordinaire), (5), du système (3 *bis*), telle que les fonctions $f_s(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$, $f_t(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$, $f_u(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$, $f_v(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$, $f_w(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$, auxquelles se réduisent respectivement, pour $x, y, z = x_0, y_0, z_0$, les inconnues s, t, u, v, w, satisfassent aux simples conditions d'avoir comme valeurs initiales respectives s_0, t_0, u_0, v_0, w_0, et de présenter, par rapport aux arbitraires α, β, γ, δ, λ, un déterminant différentiel à valeur initiale non nulle. Une semblable intégrale de (3 *bis*) étant connue, il suffirait, pour en obtenir une appartenant au type spécifié ci-dessus (I), d'opérer sur les arbitraires la transformation définie par les formules

$$f_s(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = \alpha', \quad f_t(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = \beta',$$
$$f_u(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = \gamma', \quad f_v(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = \delta' \quad f_w(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = \lambda';$$

toutefois, comme les deux équations

$$\frac{\partial(\mathfrak{s}, \mathfrak{T}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)} = 0, \quad \frac{\partial(\mathfrak{s}, \mathfrak{T}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})}{\partial(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \lambda')} = 0$$

([1]) *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 1631.

ne diffèrent l'une de l'autre que par un facteur indépendant des diverses quantités x, y, z, s, t, u, v, w, on pourra se dispenser d'effectuer la transformation, et procéder à la recherche des intégrales singulières comme dans le cas déjà examiné.

PHYSIQUE. — *La chaleur de vaporisation et la différence $m'-m$ des chaleurs spécifiques à l'état de saturation pour l'argon, l'oxygène, l'azote et l'hydrogène.* Note de MM. **E. Mathias**, **C.-A. Crommelin** et **H. Kamerlingh Onnes**.

Dans une Note antérieure ([1]), nous avons montré la possibilité de calculer la chaleur de vaporisation L et la différence $m'-m$ des chaleurs spécifiques de la vapeur saturée et du liquide saturé à T° pour l'argon, l'oxygène, l'azote et l'hydrogène, à l'aide de nos mesures de densités et des données relatives aux tensions de vapeur déterminées, comme les densités, au Laboratoire cryogène de Leyde, mais par divers expérimentateurs ([2]).

Les chaleurs de vaporisation sont données par la formule de Clapeyron-Clausius :

$$L = \frac{T}{J}\left(\frac{1}{\delta'} - \frac{1}{\delta}\right)\frac{dp}{dT},$$

où J est l'équivalent mécanique de la calorie, δ et δ' les densités du liquide et de la vapeur saturée à la température absolue T°, pour laquelle la pression de vapeur des phases coexistantes est p.

Les densités de vapeur relatives à des températures réduites basses, qui ne se prêtaient pas bien à une détermination directe, ont été calculées en partant des tensions de vapeur p et d'une équation d'état, due au professeur Kamerlingh Onnes, et d'une forme telle qu'elle s'adapte à toutes les exigences de l'expérience ([3]).

La dérivée $\frac{dp}{dT}$ a été obtenue en partant des formules empiriques auxquelles nous nous étions arrêtés pour représenter les mesures de p à Leyde pour les diverses substances étudiées.

([1]) *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 261.

([2]) *Comptes rendus*, t. 151, 1910, p. 213; t. 156, 1913, p. 129; t. 160, 1915, p. 237; et *Communications from the physical Laboratory at Leiden*, nos 115, 138 *c*, 145 *b*, 145 *d*, 152 *a*, 152 *d*.

([3]) *Comm.*, n° 156 *a*.

Les formules empiriques des tensions de vapeur varient d'un corps à l'autre; cela tient seulement à la manière dont on a, chaque fois, commencé les calculs.

Les températures auxquelles ces formules se rapportent ont été mesurées dans une échelle parfaitement définie et qui s'approche très étroitement de l'échelle absolue. Cette échelle, dont on se sert à Leyde et qui est appelée *échelle Kelvon internationale provisoire*, nous en avons fait usage également dans nos mesures relatives à la courbe des densités.

Nous avons fait le calcul de L pour toutes les températures qui se rapportent à nos mesures de densités, et nous avons réuni les résultats relatifs à chaque corps à l'aide d'une formule empirique.

L une fois connu comme fonction de la température, on obtient $m'-m$ par la formule classique

$$m'-m=\frac{dL}{dT}-\frac{L}{T}.$$

Il est à mentionner que les résultats sont finalement plus précis pour les hautes valeurs de la température réduite que pour les petites, car si la mesure de δ' offre des difficultés aux basses températures, il en est de même pour p, d'où il résulte que les valeurs de $\frac{dp}{dT}$ sont aussi moins précises.

Dans ce qui suit, les formules empiriques font connaître les tensions de vapeur en atmosphères internationales. Celles qui sont relatives à l'argon et à l'hydrogène ont déjà été publiées dans les articles cités. Les autres formules sont données ici pour la première fois.

Pour le calcul de plusieurs de ces formules empiriques, nous avons eu le précieux concours de M. le professeur J.-E. Verschaffelt, à qui nous adressons ici nos sincères remercîments.

Dans les formules suivantes, T_c désigne la température critique absolue et p_c la pression critique.

Argon.

$$\log p=4,85033-\frac{634,391}{T}+\frac{30769,09}{T^2}-\frac{1076464}{T^3}.$$

$$L^2=41,59246(T_c-T)-0,448963(T_c-T)^2+0,0026163(T_c-T)^3.$$

Oxygène.

$$T\log p=T\log p_c-0,7204T_c+2,3195(T-0,7T_c)+\frac{0,004175}{T_c}(T-0,7T_c)^2$$
$$+\frac{1,5833}{T_c^2}(T-0,7T_c)^3-\frac{1,4167}{T_c^3}(T-0,7T_c)^4-\frac{3,3333}{T_c^4}(T-0,7T_c)^5.$$

$$L^2=81,9234(T_c-T)-0,99282(T_c-T)^2+0,0052205(T_c-T)^3.$$

Azote.

$$\log p = -\frac{510,64}{T} + 12,381 - 0,12696\,T + 0,0008302\,T^2 - 0,0000019975\,T^3.$$

$$L^2 = 89,9621\,(T_c - T) - 1,47242\,(T_c - T)^2 + 0,011666\,(T_c - T)^3.$$

Hydrogène.

$$\log p = -\frac{56,605}{T} + 3,8015 - 0,10458\,T + 0,003321\,T^2 - 0,00003219\,T^3.$$

$$L^2 = 1974,48\,(T_c - T) - 116,093\,(T_c - T)^2 + 2,396106\,(T_c - T)^3.$$

La chaleur latente L, multipliée par $\frac{\Delta}{p_c}$, où Δ est la densité critique, donne la *chaleur de vaporisation réduite*, laquelle, considérée comme fonction de la *température réduite*, conduit, pour les diverses substances, à des courbes qui s'emboîtent, ainsi qu'on pouvait s'y attendre d'après le résultat fourni par les *courbes des densités réduites*. Il y subsiste, toutefois, des particularités qui demandent à être approfondies par des expériences ultérieures.

Quant à la différence $m' - m$ des chaleurs spécifiques de la vapeur saturée et du liquide saturé, on trouve que sa valeur, fortement négative près du point critique, est plus petite en valeur absolue aux températures réduites plus basses, tout en restant toujours nettement négative; il s'ensuit que m' est négatif pour toutes les températures du domaine de l'état liquide. Aux températures réduites les plus basses, $m' - m$ passe par un maximum; mais le degré de précision des données fait désirer que ce point soit établi d'une façon plus nette par des mesures ultérieures.

Dans le cas de l'hydrogène, pour lequel nous connaissons des valeurs de la chaleur spécifique du liquide m, qu'on peut représenter par la formule $m = m_0 + ct$ (¹), on peut en déduire la valeur de la chaleur spécifique de vapeur saturée m'. Dans le Tableau suivant, les températures sont celles auxquelles nous avons fait des déterminations de densités :

T.	$m' - m$.	m.	m'.
20°,41	−6,06	2,28	−3,78
17,90	−6,51	2,02	−4,49
15,86	−7,36	1,81	−5,55

(¹) *Comm.* n° 153 *a* et A. Eucken, *Verh. d. phys. Ges.*, t. 18, 1896, p. 4.

M. B. Baillaud fait hommage à l'Académie du *Rapport relatif aux signaux horaires émis de l'Observatoire de Paris par le poste radiotélégraphique de la Tour Eiffel depuis* 1910 *jusqu'à la fin de* 1919 *et aux signaux horaires émis par le poste radiotélégraphique de La Doua à partir du* 27 *août* 1918, qu'il a rédigé avec le concours de Mme Chandon, de M. Pourteau et de Mme Michaud.

M. Ch. Lallemand fait hommage à l'Académie de diverses brochures dont il est l'auteur, relatives au *Nivellement général de la France*, aux *Nivellements de précision et de haute précision*, à l'*Élasticité du globe terrestre*, au *Nivellement des vallées des Alpes* et à la *Question du litre*.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Membre de la Section de Géométrie, en remplacement de M. *C. Jordan*, décédé.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 54,

M. Henri Lebesgue obtient	44	suffrages
M. Ernest Vessiot »	5	»
M. Jules Drach »	3	»
M. Élie Cartan »	2	»

M. Henri Lebesgue, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

CORRESPONDANCE.

M. le Secrétaire perpétuel signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Camille Cavallier. *Notes économiques d'un métallurgiste*. (Extraits.)

2° Gustave Lambert. *Son projet de voyage au pôle. Sa mort.* (Présenté par M. G. Bigourdan.)

3° Le fascicule XIX, 2e Partie, des *Études de Lépidoptérologie comparée*, par Charles Oberthür. (Présenté par M. E. Bouvier.)

GÉOMÉTRIE. — *Sur le tracé des arcs de cercles de grand rayon.* Note de M. **F.-H. Murray**, présentée par M. Hadamard.

Dans les dessins du génie civil et ailleurs, il est souvent nécessaire de construire avec exactitude, à l'encre, un segment d'un cercle de rayon relativement grand. Au lieu du compas ordinaire on emploie alors habituellement un appareil si grand que le maniement en devient difficile, d'où résultent des erreurs de tracé.

On peut résoudre le problème avec un instrument basé sur un principe mécanique très élémentaire, et qui possède les dimensions du compas ordinaire.

Soient Σ_n un système de corps rigides A_1, A_2, ..., A_n, et L un axe fixe dans l'espace. Dans chaque corps A_i supposons deux axes l'_i, l''_i fixes par rapport à A_i, et se coupant au point O_i. Si les corps A_i, A_{i+1} sont assujettis à pivoter l'un par rapport à l'autre autour de l'axe $l''_i = l'_{i+1}$, de manière à faire coïncider les points O_i, O_{i+1}, ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), tandis que A_1 est assujetti à pivoter sans glissement autour de L, alors dans un mouvement quelconque du système chaque corps A_i décrira un mouvement d'un corps rigide autour du point fixe O_1.

Un instrument commode peut être construit avec un tel système de deux corps. Soit A_2 un bras qui porte un tire-ligne, pivotant autour de l'axe l'_2; A_1 possède deux jambes dont les bouts P_1, P_2 sont aiguisés, et un mécanisme avec une échelle pour ajuster l'axe l'_2. L'axe l'_1 est la ligne qui contient les points P_1, P_2.

Pour tracer un arc de cercle de rayon R, on ajuste l'axe l'_2 de façon à obtenir la lecture R sur l'échelle; les points P_1, P_2 étant posés convenablement sur un plan M, on donne au système un mouvement dans lequel P_1, P_2 restent fixes, et le tire-ligne décrira sur M un arc de cercle dont le rayon aura très approximativement la valeur exigée.

Comme dans le compas ordinaire, le plan défini par le bout du tire-ligne satisfait à la condition nécessaire de rester perpendiculaire au plan M et tangent à la courbe si cette condition est satisfaite pour un point quelconque de la courbe.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la loi de Gauss.*
Note de M. **J.-W. Lindeberg**, présentée par M. Émile Borel.

1. Supposons que l'erreur u soit la résultante d'un grand nombre n d'erreurs partielles, indépendantes les unes des autres :

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Nous désignerons par $U_\mu(x)$ la probabilité pour que la valeur de l'erreur u_μ soit $\leqq x$, par $U(x)$ la fonction correspondante relative à l'erreur résultante u, et nous admettrons que ces fonctions sont telles que les quantités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dU_\mu(x) = a_\mu, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dU_\mu(a_\mu + x) = \sigma_\mu^2 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

(les intégrales étant prises dans le sens de Stieltjes) sont toutes finies. Posons enfin

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu = A, \qquad \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = r^2.$$

Ceci posé, on peut tirer de certains résultats établis par Liapounoff [1] le théorème que voici :

Le nombre positif ϑ étant donné, on pourra, à tout nombre $\varepsilon > 0$, faire correspondre un autre nombre positif η, dépendant uniquement de ϑ et de ε, tel que l'inégalité

$$(1) \qquad \left| u(a + rx) - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \right| < \varepsilon$$

est vérifiée toutes les fois qu'on a

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2+\vartheta}\, du_\mu(a_\mu + rx) < \eta.$$

2. Supposons en particulier $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ et admettons en outre que les erreurs partielles $u_1, \ldots, u_n$ soient *bornées*, de sorte que $|u_1|, \ldots, |u_n|$ restent inférieurs à une limite finie α. Dans ce cas on pourra, du théorème ci-dessus, tirer la conséquence suivante :

---

[1] A. Liapounoff, *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. 12, 1901).

Pour tout $\varepsilon (> 0)$ *il existe un nombre* η *tel que*

$$\left| u(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2r^2}}}{r\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon$$

toutes les fois que

$$\alpha < \eta r.$$

C'est bien là le sens exact de l'affirmation classique : « la somme d'un grand nombre de petites erreurs suit sensiblement la loi de Gauss ».

3. Revenons aux hypothèses énoncées au début de cette Note. A l'aide d'une méthode qui nous semble à la fois plus simple et plus naturelle que celles dont on s'est servi jusqu'ici dans cette théorie, nous avons réussi à étendre comme il suit le théorème du numéro 1 ([1]) :

A tout $\varepsilon (> 0)$ *correspond un nombre positif* η *tel que l'inégalité* (1) *a lieu toutes les fois qu'on a*

$$\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2 \, d\,\mathrm{U}_\mu(a_\mu + rx) > 1 - \eta.$$

Nous ferons remarquer que ce théorème ne renferme aucune hypothèse relative à la manière dont se comportent les fonctions $\mathrm{U}_\mu(x)$ pour les grandes valeurs de $|x|$, en dehors de celles admises au n° 1.

4. Dans une Note récente ([2]) M. Paul Lévy, en traitant la question qui nous occupe, a indiqué deux conditions générales qui, selon lui, seraient suffisantes pour assurer la convergence vers la loi de Gauss. Cependant l'assertion de M. Paul Lévy, si nous l'avons bien compris, n'est pas exacte, comme le montre l'exemple suivant.

Admettons que -1, 0 et $+1$ soient les seules valeurs que puissent prendre les erreurs partielles $u_1, \ldots, u_n$, qui sont par suite bornées, et soient $\frac{1}{2n}$, $1 - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{2n}$ les probabilités de ces valeurs. On aura alors, pour toute valeur de μ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, d\,\mathrm{U}_\mu(x) = \frac{1}{n},$$

([1]) Voir notre Mémoire : *Ueber das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Annales Acad. scient. Fenn.*, t. 16, 1920), ainsi qu'un travail de nous qui paraîtra dans la *Mathematische Zeitschrift*.

([2]) *Sur le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs* (*Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 855-857).

et l'on en conclut que les deux conditions énoncées par M. Paul Lévy sont bien remplies. Et, malgré cela, la fonction $M(x)$ ne tend évidemment pas vers

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt,$$

lorsque n croît indéfiniment, puisque, pour une valeur donnée de n, elle garde une valeur constante entre deux entiers consécutifs quelconques.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions automorphes de plusieurs variables indépendantes.* Note de M. **P.-J. Myrberg**, présentée par M. Émile Borel.

1. Dans un Mémoire qui paraîtra dans un autre Recueil, nous avons étudié certaines classes de fonctions automorphes de deux variables, et tout particulièrement les singularités essentielles de ces fonctions. Nous indiquerons dans cette Note comment nos résultats s'étendent aux fonctions d'un nombre quelconque n de variables indépendantes [1].

Considérons un groupe Γ de substitutions linéaires à coefficients réels

$$(1) \qquad X_i = \frac{\alpha_{i,1}x_1 + \ldots + \alpha_{i,n}x_n + \alpha_{i,n+1}}{\alpha_{n+1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n+1,n}x_n + \alpha_{n+1,n+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

qui transforment l'hypersphère

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

en elle-même. Nous supposons le déterminant des coefficients $\alpha_{i,k}$ égal à ± 1 et nous admettrons que le groupe Γ ne renferme pas de substitution infinitésimale.

Pour l'étude de ces groupes et des fonctions automorphes correspondantes, on aura à résoudre ce problème général :

Trouver l'ensemble des points d'accumulation [2] *des transformées par le groupe* Γ *d'une multiplicité algébrique quelconque à* $2n - 2$ *dimensions.*

On démontre d'abord que les transformées d'un point réel quelconque P,

---

[1] Une exposition détaillée de nes recherches sur ce sujet paraîtra dans un autre Recueil.

[2] C'est-à-dire les points tels que, par toute hypersphère ayant l'un d'eux comme centre, passe une infinité de transformées de la multiplicité en question.

pris à l'intérieur de l'hypersphère (2), s'accumulent vers les points d'un certain ensemble (m), situé sur la surface de cette hypersphère, et qui ne dépend pas du choix du point P. Par tout point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de (m) menons le plan tangent à la sphère en question

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 1$$

et désignons par (M) l'ensemble de tous ces plans qui sont des multiplicités à $2n-2$ dimensions puisque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables complexes. A l'aide de considérations qui ne sauraient trouver place ici, on arrive à la solution suivante du problème posé ci-dessus :

Les transformées par le groupe Γ *d'une multiplicité algébrique quelconque à* $2n-2$ *dimensions qui ne comprend aucun point de* (m) *admettent comme points d'accumulation l'ensemble des points des plans* (M).

Il résulte de ce théorème que les transformées d'un point quelconque de l'espace ne faisant partie d'aucun des plans (M) admettent les points de l'ensemble (m) comme seuls points d'accumulation.

2. Considérons maintenant la classe des fonctions automorphes, correspondant au groupe Γ, qui sont représentables par des quotients de séries de la forme

$$\Theta = \sum \mathcal{H}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) \left[\frac{\partial(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right]^k, \tag{3}$$

où $\mathcal{H}$ désigne une fonction rationnelle, séries qui convergent dès que l'exposant k dépasse une certaine limite.

En admettant que les fonctions $\mathcal{H}$ qui entrent dans les séries en question restent finies aux différents points de l'ensemble (m), il résulte du théorème ci-dessus que *les singularités essentielles des fonctions automorphes de la classe considérée sont constituées par l'ensemble des points des plans* (M). Il faut noter que ces plans dépendent uniquement du groupe donné, de même que les singularités essentielles dans le cas d'un groupe automorphe à *une* variable.

Il existe des groupes pour lesquels l'ensemble (m) comprend tout point réel de la multiplicité (2); tels sont, par exemple, les groupes formés par des substitutions (1) à coefficients entiers. Pour ces groupes, si le nombre n des variables est > 2, les points des plans (M) remplissent un domaine continu à $2n$ dimensions, défini par l'inégalité

$$x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + \ldots + x_n\overline{x_n} - 1 \geqq |x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1| \tag{4}$$

($\overline{x_i}$ désignant le conjugué du nombre x_i). Par suite, toute expression

formée à l'aide des séries (3) représente une seule fonction monogène existant dans le reste de l'espace, c'est-à-dire dans le domaine

$$x_1\overline{x_1}+x_2\overline{x_2}+\ldots+x_n\overline{x_n}-1<|x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-1|.$$

Pour $n=2$, on aura des résultats tout différents. Les points des plans (M) forment une multiplicité continue à $2n-1$ dimensions, définie par l'*égalité*

$$(4') \qquad x_1\overline{x_1}+x_2\overline{x_2}-1=|x_1^2+x_2^2-1|,$$

cette multiplicité divise l'espace à $2n$ dimensions en trois domaines distincts, et toute série (3) représente *trois* fonctions monogènes, existant chacune dans l'un de ces domaines.

Un autre cas extrême est celui où (m) est un ensemble discret de points. Toute série (3) définit, dans ce cas, une seule fonction monogène, dont le domaine d'existence comprend tout l'espace à $2n$ dimensions, sauf les points des plans (M).

Lorsque $n>2$, il y aura, entre ces deux cas extrêmes, des cas intermédiaires où les points de l'ensemble (m) forment un domaine continu à moins de $n-1$ dimensions. En particulier, il existe des groupes pour lesquels (m) est un continuum linéaire; on démontre que l'ensemble (M), qui est alors à $2n-1$ dimensions, divise l'espace en trois domaines distincts.

ASTRONOMIE. — *Sur les déviations des rayons lumineux passant au voisinage d'un astre.* Note de M. **Ferrier**, présentée par M. Painlevé.

Il n'est question, dans ce qui suit, que des déviations produites par la réfraction de la lumière à travers l'atmosphère gazeuse qui entoure l'astre (en fait, la Lune lors d'une éclipse de Soleil). Il nous a en effet paru utile de rechercher dans quelle mesure ces déviations parasites peuvent se superposer à l'effet Einstein et, le cas échéant, en masquer la loi véritable. Car, dans l'effet Einstein, le rayon d'une étoile passe près du bord du Soleil éclipsé par la Lune, donc passe également près de la Lune et subit la réfraction de l'atmosphère lunaire.

Nous n'étudions ici que la portion de l'atmosphère où la loi $\frac{p}{\mu}=\mathrm{RT}$ qui relie la pression et la masse spécifique du gaz à sa température absolue reste valable. Nous admettons que, dans la région où la température tombe au-dessous de quelques degrés absolus, l'atmosphère de l'astre cesse d'exister.

Admettons encore, pour simplifier les calculs, et en l'absence de tout renseignement meilleur sur la température du gaz à grande distance de l'astre, que cette température absolue est, à la distance r du centre,

$$T = T_0 \frac{r_0}{r},$$

r_0 étant le rayon de l'astre, et T_0 la température du gaz dans les environs de sa surface.

Si g est l'intensité de la pesanteur à la distance r du centre,

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

Lorsque l'atmosphère est en équilibre, sa pression en chaque point satisfait à la relation

$$dp = -\mu g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 dr$$

ou

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g_0 r_0}{RT_0} \frac{dr}{r},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{g_0 r_0}{RT_0}}$$

et

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{g_0 r_0}{RT_0} - 1}.$$

Soit n l'indice du gaz à la distance r :

$$\frac{n - 1}{n_0 - 1} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{g_0 r_0}{RT_0} - 1}.$$

Considérons un rayon lumineux passant à une distance r du centre de l'astre. Il subit, par réfraction, une petite déviation ε.

La déviation élémentaire $d\varepsilon$, lorsque le rayon passe d'une couche d'indice n dans une couche d'indice $n + dn$, est, si i désigne son angle d'incidence,

$$d\varepsilon = \operatorname{tang} i \, dn,$$

n restant très voisin de 1. On trouve aisément que ε est de la forme

$$\varepsilon = \frac{A}{r^{\left(\frac{g_0 r_0}{RT_0} - 1\right)}},$$

A désignant une constante.

On a donc

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{g_0 r_0}{\mathrm{RT}_0} - 1} = \frac{n-1}{n_0 - 1} = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Voyons, par des exemples numériques, comment varie ε lorsque le rayon passe de plus en plus loin du bord de l'astre. Pour la Terre, admettons que $T_0 = 300°$ absolus. Calculons R en prenant comme unités le kilogramme, le mètre, la seconde :

$$\mathrm{R} = p\,\frac{g_0}{\varpi}\cdot\frac{1}{273},$$

p est la pression de l'air normal en kilogrammes par mètre carré; ϖ le poids d'un mètre cube d'air normal :

$$p = 10300^{\mathrm{kg}}, \qquad \varpi = 1^{\mathrm{kg}},29,$$

$$\frac{g_0 r_0}{\mathrm{RT}_0} = \frac{g_0 \times 6600000 \times 1,29 \times 273}{g_0 \times 10300 \times 300} = 758,$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{757}.$$

On trouve ainsi qu'à une distance du bord de la Terre égale à $0,0052\,r_0$, soit 34^{km}, la déviation est 100 fois plus faible que pour le rayon rasant.

On voit ainsi que l'observation de l'effet Einstein au voisinage d'un astre analogue à la Terre ne sera qu'insensiblement modifiée par la réfraction. La déviation d'Einstein obéit en effet à la loi

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_0} = \frac{r_0}{r}$$

qui ne prête à aucune confusion avec la précédente.

Pour appliquer les formules établies ci-dessus à un astre quelconque, il faut faire une hypothèse sur sa température, et sur la densité, par rapport à l'air, du gaz qui constitue son atmosphère.

Cas de la Lune. — Nous admettrons que la température de la Lune est celle qui a été adoptée pour la Terre, et que l'atmosphère est constituée par de l'hydrogène. Calculons l'exposant de $\frac{r_0}{r}$, en admettant que la masse de la Lune est $\frac{1}{81}$ de celle de la Terre, et son rayon 0,27 rayon terrestre :

$$\frac{g_0 r_0}{\mathrm{RT}_0} = \frac{1}{15} \times 758 \times \frac{1}{81} \times \frac{1}{0,27} = 2,3,$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1,3}.$$

L'exposant est voisin de celui de la formule d'Einstein; l'effet de réfraction est difficilement séparable de la déviation de gravitation.

Si la loi précédente est approximativement juste, et si la valeur de ε_0 n'excède pas $2''$ comme les observations d'Airy ont paru le montrer, on se rend compte que cette atmosphère, qui est capable de modifier profondément l'effet Einstein au moment des éclipses de Soleil, aurait pu passer inaperçue jusqu'ici : la déviation croît très lentement lorsqu'on approche de l'astre, et il ne se passe rien de particulier au moment des occultations.

ASTRONOMIE. — *Observations de la comète Skjellerup, faites à l'équatorial coudé de l'Observatoire de Lyon.* Note de M. J. **Guillaume**, présentée par M. B. Baillaud.

Observations de la comète.

Dates 1922.	Temps moyen de Greenwich.	☉-★ Δα.	Δδ.	Nombre de compar.	α apparente.	Log. fact. parall.	δ apparente.	Log. fact. parall.	★
	h m s	m s	′ ″		h m s		° ′ ″		
Mai 19...	9.44.43	+0.13,53	+ 1.55,8	6: 8	8. 4.32,95	+9,644	21.26. 2,0	+0,755	*a*
20...	9.18.59	+0.20,99	— 3. 2,1	10:10	8. 9.26,20	+9,640	22.20.32,8	+0,731	*c*
21...	9.48.45	+0.25,66	+ 2. 1,3	10:10	8.14.43,92	+9,650	23.19. 8,7	+0,638	*d*
22...	9. 4.30	—0.20,81	+ 4.53,6	10:10	8.19.57,93	+9,612	24.16.35,4	+0,734	*f*
23...	9.33.26	—0.17,34	+ 3.12,7	10:10	8.25.43,07	+9,654	25.22. 7,9	+0,725	*g*
24...	9.43.38	—0.27,31	+10. 1,7	10:12	8.31.36,70	+9,659	26.22.23,9	+0,728	*i*

Positions moyennes des étoiles de comparaison.

★.	Désignation.	α moyenne, 1922,0.	Réduction au jour.	δ moyenne, 1922,0.	Réduction au jour.	Autorités.
		h m s	s	° ′ ″	″	
a.	Anon. 10^m,5	8. 4.18,84	+0,58	21.24.16,0	— 9,8	rapp. à *b*
b.	BD + 21°,1769 ...	8. 4.55,02		21.35.48,2		A.G. Berlin, 3280
c.	BD + 22°,1884 ...	8. 9. 4,63	+0,58	22.23.44,4	— 9,5	BD, IV + 22°,1884
d.	Anon. 16^m,6......	8.14.17,68	+0,58	23.17.16,6	— 9,2	rapp. à *e*
e.	BD + 23°,1939 ...	8.17.15,02		23.12. 4,6		A.G. Berlin, 3350
f.	BD + 24°,1920 ...	8.20.18,14	+0,60	24.11.50,6	— 8,8	» 3369
g.	Anon. 11^m	8.25.59,81	+0,60	25.19. 3,6	— 8,4	rapp. à *h*
h.	BD + 25°,1937 ...	8.26.50,71		25.14.39,3		A.G. Cambridge, 4563
i.	BD + 26°,1809 ...	8.32. 3,39	+0,62	26.12.30,2	—8,0	» 4601

Remarques. — La comète est vaguement circulaire, d'environ une demi-minute d'arc, sans condensation marquée. Le 19 et le 24 elle paraissait de 11e grandeur; aux dates intermédiaires, à cause de la diffusion atmosphérique, sans doute, elle semblait plus faible d'une demi-grandeur les 20 et 22, et les 21 et 23 elle était de 12e grandeur. Le 23, les images étaient très instables.

ASTRONOMIE. — *Observation de la comète 1922 b (Skjellerup), faite à l'Observatoire de Marseille (équatorial d'Eichens* $0^m,26$ *d'ouverture).* Note de Mlle **O. Jasse**, présentée par M. Bigourdan.

Date. 1922.	Temps moyen de Marseille.	ΔⱤ.	ΔⱣ.	Ɽ apparente.	Log. fact. parall.	Ᵽ apparente.	Log. fact. parall.
Mai 24..	$9^h20^m58^s$	$-0^m39^s,66$	$+8'8'',7$	$8^h31^m24^s,32$	9,662	$+26°20'30'',9$	0,663

Étoile de comparaison.

★.	Gr.	Ɽ moyenne 1922,0.	Réduction au jour.	Ᵽ moyenne 1922,0.	Réduction au jour.	Autorité.
1...	7,8	$8^h32^m\ 3^s,37$	$+0^s,61$	$+26°12'30'',2$	$-8'',0$	Cbr. E., 4601

Remarque. — La comète est faible et assez étendue. Elle présente une condensation de 11e grandeur.

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur une nouvelle méthode interférentielle pour la mesure du diamètre apparent des étoiles.* Note de M. **A. Danjon**, présentée par M. B. Baillaud.

La méthode interférentielle indiquée par Fizeau et employée par Michelson pour la mesure du diamètre apparent des étoiles présente deux inconvénients :

1° Elle exige une distance considérable entre les deux faisceaux interférents, distance qui atteint 12^m pour un astre de $\frac{1}{100}$ de seconde d'arc.

2° Les franges qu'on observe s'évanouissent progressivement jusqu'à leur disparition complète, sans qu'on fasse sur leur netteté des mesures *quantitatives*.

A ces deux points de vue, la méthode que je présente dans cette Note constitue un progrès. Les essais actuellement en cours à l'Observatoire de Strasbourg ont donné, au laboratoire, des résultats satisfaisants. Malheureusement, le mauvais temps a contrarié jusqu'à présent les observations sur le ciel.

Considérons un appareil interférentiel du genre des lames de Jamin, fournissant, en lumière blanche, des franges localisées à l'infini. Négligeons pour le moment leur irisation, comme on est en droit de le faire au voisinage de la frange centrale si l'on dispose devant l'œil un verre rouge (ou encore sur la frange centrale elle-même si elle est noire). Si l'on exa-

mine un fond éclairé à travers l'appareil, les franges rectilignes et parallèles occupent une certaine région du champ. Supposons maintenant qu'on regarde le ciel obscur, et qu'une étoile apparaisse dans la région du champ où se voyaient tout à l'heure les franges d'interférence. Si l'étoile se déplace, son éclat passera par un minimum chaque fois qu'elle traversera une frange sombre, et par un maximum chaque fois qu'elle traversera une frange brillante.

Si l'étoile n'a pas de dimensions apparentes sensibles, elle s'éteindra complètement en passant sur le centre des franges sombres. Au contraire, si l'étoile, tout en restant petite par rapport à la largeur des franges, a cependant un disque appréciable, tous les points de ces disques ne s'éteindront pas à la fois : l'extinction ne sera totale que le long d'une corde coïncidant avec le centre de la frange sombre; de part et d'autre de cette corde, de la lumière subsistera. L'extinction sera incomplète, et l'étoile à son minimum d'éclat sera d'autant plus brillante que son disque, toutes choses égales d'ailleurs, sera plus grand par rapport à l'interfrange.

Dans le cas d'un disque circulaire uniformément brillant, le calcul donne, pour le rapport du minimum au maximum d'éclat global, l'expression suivante

$$\gamma = \frac{1 - J}{1 + J},$$

J étant la série connue

$$J = 1 - \frac{1}{2}\frac{n^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{n^2}{(2.4)^2} - \ldots$$

dans laquelle n est le produit du nombre π par le rapport du diamètre angulaire de l'étoile à l'interfrange. La détermination du diamètre est ainsi ramenée à celle du rapport γ, c'est-à-dire, en définitive, à la mesure photométrique des éclats extrêmes que prend l'étoile vue dans l'interféromètre.

C'est l'observation seule qui peut renseigner sur la valeur de la méthode; en particulier, on ne peut prévoir l'influence de l'agitation atmosphérique sur les mesures, et le mauvais temps persistant n'a pas permis d'en faire l'étude expérimentale. Mais divers autres points importants ont pu être complètement élucidés par des expériences de laboratoire.

L'interféromètre employé comprend deux miroirs argentés et deux lames plan-parallèles, montées d'une façon particulière qui permet d'obtenir à volonté des franges de largeur quelconque, localisées dans le plan de l'étoile artificielle. Les mesures qui ont porté sur des disques de 20″ à 90″, avec des interfranges très divers, ont été faites à l'œil nu. Elles vérifient la formule

ci-dessus, convenablement corrigée pour tenir compte de divers points négligés en première approximation : la lumière employée n'est pas monochromatique, les deux faisceaux n'ont pas rigoureusement la même intensité, etc. Pour ces raisons, l'extinction n'est jamais rigoureusement complète, même pour $n = 0$. Le calcul montre qu'on en tient compte en ajoutant au numérateur de γ un terme ε, qui, pour un appareil bien établi, et si l'on opère près de la frange centrale, ne doit pas atteindre $\frac{1}{100}$. Les mesures de ε pour l'interféromètre employé ont effectivement donné la valeur 0,006, qui témoigne de la perfection des pièces optiques travaillées par la maison Jobin, et du soin particulier apporté à l'argenture des miroirs.

En introduisant cette valeur de ε dans la discussion de la formule qui relie γ et n, on arrive aux conclusions suivantes. La précision absolue des mesures reste voisine du cinquantième de l'interfrange. Elle est maximum quand le diamètre à mesurer vaut un dixième d'interfrange, mais on peut mesurer jusqu'au vingtième d'interfrange. Dans la méthode de Fizeau, le diamètre à mesurer vaut 1,22 fois l'interfrange ; le gain est sensible. Ainsi pour mesurer Bételgeuse (α Orion) dont le diamètre est voisin d'un vingtième de seconde, il suffit de produire des franges d'une seconde, ce qui s'obtient avec un écart de 10^{cm} seulement entre les deux faisceaux, au lieu de 3^{m}.

Pour les mesures stellaires, l'instrument est utilisé avec une lunette astronomique qu'on peut d'ailleurs monter avant ou après l'interféromètre. Il est clair qu'on a intérêt à la placer en avant, puisqu'on bénéficie alors de son grossissement, et qu'on peut réduire encore les dimensions de l'interféromètre. Ainsi, en utilisant un grossissement de 20 fois, il suffirait, pour mesurer Bételgeuse, de produire des franges de $20''$, ce qui est réalisable avec l'interféromètre en service. L'expérience sera tentée dès le retour de la constellation d'Orion, avec une lunette de 16^{cm} d'ouverture.

Il serait facile de construire un interféromètre de quelques centimètres carrés de surface, qui, monté sur les grands télescopes modernes, permettrait d'atteindre le $\frac{5}{100}$ de seconde, à moins, toutefois, que notre atmosphère n'y mette irrémédiablement obstacle.

MÉCANIQUE. — *Sur les lignes de glissement planes des corps pulvérulents, cohérents ou plastiques.* Note de M. Gustave Guillaumin.

I. J'ai obtenu antérieurement l'équation différentielle caractéristique du double système des lignes de glissement des massifs pulvérulents plans en

recherchant, suivant les méthodes classiques, les multiplicités d'exception pour le problème de Cauchy. L'équation différentielle en question, jointe à cette autre évidente

$$dy = \operatorname{tang}\psi . dx,$$

représente les caractéristiques (d'ordre nul), toujours réelles, du système fondamental des deux équations aux dérivées partielles du premier ordre définissant l'équilibre. Les lignes de glissement sont le support, ou la projection, dans le plan (x, y), des systèmes caractéristiques; c'est ce qui leur permet de jouer, dans la construction des solutions, le rôle des lignes de discontinuités, introduites pour la première fois par M. Boussinesq, ainsi que je l'ai montré dans ma Note des *Comptes rendus* du 5 mai 1919. De même que, suivant une remarque de M. Hadamard, il est impossible de traiter de la dynamique des gaz sans faire intervenir des discontinuités, de même il sera *en général* impossible de construire des solutions de l'état ébouleux sans introduire certaines discontinuités délimitées par une ou plusieurs lignes de glissement. On peut d'ailleurs montrer que cette propriété des lignes de glissement est générale et s'applique également, même dans le cas de corps hétérogènes, à l'équilibre limite défini par une loi de Coulomb quelconque F (T, N) = o. Ce qui paraît digne de remarque, c'est que les discontinuités, dont l'existence est subordonnée à la réalité des caractéristiques, s'introduisent généralement en dynamique, alors qu'elles apparaissent ici, en dehors de toute singularité du champ des forces appliquées, dans un problème de pure statique.

II. L'équation caractéristique des lignes de glissement, rappelée dans ma dernière Note, peut s'écrire, sous la forme intrinsèque,

$$(1) \qquad \frac{dp}{ds} - \frac{2p \operatorname{tang}\varphi}{R} = F_s,$$

p désignant toujours la pression moyenne, φ l'angle de frottement et R le rayon de courbure de la ligne de glissement considérée, compté positivement lorsque le centre de courbure se trouve du même côté que la direction positive de l'axe principal portant la plus grande pression par rapport à la direction positive de la tangente à la ligne de glissement, les directions en question étant choisies de manière à faire un angle aigu, d'ailleurs toujours inférieur à 45°. Quant à F_s, c'est ce qu'on peut appeler la *composante oblique de glissement* de la force appliquée F sur la tangente à la ligne de glissement considérée; c'est en effet la composante de cette force sup-

posée décomposée suivant les directions des tangentes aux deux systèmes de lignes de glissement, qui font entre elles l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

III. Lorsque les forces appliquées sont négligeables, on obtient la relation

$$\log \frac{p}{p_0} = 2\varepsilon(\chi - \chi_0)\tang\varphi, \tag{2}$$

qui donne, sur chaque ligne de glissement, la loi de variation de p en fonction de l'inclinaison χ de la plus grande pression principale, bissectrice intérieure des deux lignes de glissement; $\varepsilon = \pm 1$ suivant le système de lignes de glissement choisi.

Si l'on considère le quadrilatère curviligne constitué par quatre arcs quelconques du double faisceau des lignes de glissement, on déduit de la relation ci-dessus les deux égalités suivantes [1] :

$$p_0 p_2 = p_1 p_3, \tag{3}$$

$$\chi_1 - \chi_0 = \chi_2 - \chi_3. \tag{4}$$

IV. Les équations précédentes s'appliquent aux corps cohérents. Il suffit, suivant une remarque de ma dernière Note, d'y remplacer p par $p + G\cot\varphi$, G étant la cohésion. En particulier, la relation (3), ainsi modifiée, et la relation (4) expriment deux propriétés, l'une mécanique, l'autre géométrique, des lignes de Lüders-Hartmann dans l'hypothèse du schème mécanique de Coulomb-Duguet, appliqué au cas des déformations planes.

Dans le cas des corps plastiques, l'équation (1) s'écrit

$$\frac{dp}{ds} - \frac{2G}{R} = F_s, \tag{5}$$

F_s représentant évidemment ici la projection de la force appliquée sur la tangente à la ligne de glissement considérée. Si la force appliquée dérive d'une fonction de forces U, on a, le long de chaque ligne de glissement, la relation suivante, correspondant au principe de Pascal,

$$p - U - 2\varepsilon G\psi = \text{const.} \tag{6}$$

Quant à la relation (3), elle dégénère en la suivante :

$$p_0 + p_2 = p_1 + p_3. \tag{3'}$$

[1] Les indices de p et de χ correspondent aux sommets consécutifs du quadrilatère.

V. Revenons aux corps pulvérulents et envisageons le cas d'un écoulement permanent plan limite, dans lequel les grains soient censés, par hypothèse, suivre les lignes de glissement. Il suffit alors, dans (1), de remplacer F par F $-\rho\gamma$, ρ désignant la densité et γ l'accélération, pour en déduire la relation suivante, valable sur tout filet semi-fluide, qui généralise le théorème de Bernoulli,

$$(7) \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{W^2}{2}\right)-\frac{2\tan\varphi}{R}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{W^2}{2}\right)=\frac{F_s}{\rho},$$

où W représente la vitesse d'écoulement. Cette relation explique bien, qualitativement, certains phénomènes constatés dans l'écoulement des matières sèches par filets quasi rectilignes.

VI. Il est possible, comme je me propose de le montrer ailleurs, d'appliquer avantageusement les propriétés des lignes de glissement au problème des murs de soutènement. Je montrerai également comment on peut, en abandonnant le terrain analytique, rattacher les propriétés de ces lignes à la géométrie intrinsèque de la statique plane des milieux continus, géométrie qui joue, comme on sait, un rôle important dans l'application de la méthode théorico-expérimentale de M. Mesnager, pour la détermination des tensions élastiques sur modèles réduits. A cette méthode s'apparente d'ailleurs l'étude expérimentale proposée à la fin de ma dernière Note.

GÉODÉSIE. — *Expériences relatives à la marche d'un pendule et d'un chronomètre, effectuées à Chamonix et à l'Observatoire du mont Blanc, du 1er août au 10 septembre* 1921. Note de M. **Jean Lecarme**, présentée par M. Painlevé.

Ces expériences font suite aux études que j'ai entreprises pour la première fois en 1899 (1), à l'Observatoire de M. J. Vallot, situé sur l'arête rocheuse du sommet du mont Blanc. Leur but principal était de déterminer les conditions d'établissement d'un poste récepteur de T. S. F., afin de connaître l'heure exacte, sans laquelle il est impossible de réaliser la plupart des expériences de physique, en vue desquelles l'observatoire a été destiné. Les divers essais tentés dans ce but m'avaient prouvé que ce pro-

(1) *Comptes rendus*, t. 129, 1899; p. 854.

blème présentait de grandes difficultés. Parmi les principales, il faut citer la violence des tourbillons de vent, accompagnés d'électricité sous forme d'effluves ou de foudre, la rupture fréquente des fils extérieurs par suite de leur enrobement de glace pendant les tempêtes, le froid intense qui règne en permanence à ces altitudes, et enfin les troubles physiologiques résultant de la faible pression atmosphérique (H : 44^{cm}) et du manque d'oxygène, provoquant chez les opérateurs de l'anémie cérébrale, rendant tout travail extrêmement pénible.

Ces difficultés ont été tournées en partie de la manière suivante : les fils extérieurs ont été encastrés dans la neige, qui est un bon isolant, au lieu d'être tendus au-dessus du sol. En ce qui concerne les effluves électriques, déjà très atténuées par cette disposition, j'ai introduit dans le circuit antenne-terre un tube cylindrique en verre, muni de deux électrodes à grande surface, et contenant un gaz raréfié, à une pression correspondant au minimum de résistivité électrique. Ces tubes pouvaient supporter en régime normal un courant de 25 milliampères sous une tension de 50 kilovolts. De ce fait, les parasites furent très atténués, et l'éclairement du tube au moment du passage des nuages électrisés prévenait l'opérateur tout en le garantissant, les décharges passant de préférence dans le gaz raréfié, dont la self est moindre que celle des circuits du récepteur.

Quant aux troubles physiologiques, les injections sous-cutanées d'oxygène gazeux, que nous a pratiquées le Dr Bayeux, produisent une grande amélioration de l'état général. Grâce à ces perfectionnements j'ai pu, cet été, installer et utiliser un poste récepteur, malgré une violente tempête de neige qui a duré pendant tout le séjour à l'observatoire (18 au 26 août). Disposant ainsi de la réception des signaux horaires de la Tour Eiffel, j'ai tenté d'étudier par ce moyen, qui n'avait pas encore été appliqué au mont Blanc, les variations de marche d'un pendule battant la seconde à Paris, ainsi que celle de deux chronomètres.

A cet effet, j'ai transporté à l'Observatoire de M. J. Vallot, outre le matériel de T.S.F., un pendule constitué par une tige de 1^m de longueur, en métal invar, compensée, et comportant une masse lenticulaire de 10^{kg}. Ce pendule, entretenu électriquement, commandait, au moyen d'une came en platine, montée sur saphirs, une horloge avec cadran à secondes, le courant étant produit par 3 piles Féry, seules utilisables à cette altitude. Le réglage de cet instrument avait été préalablement effectué à Paris, pendant plusieurs mois, avec une précision de $\pm 2''$ par mois. Son transport au mont Blanc a été effectué avec le plus grand soin, afin d'éviter tout déré-

glage. Les mêmes expériences ont été ensuite reprises à Chamonix (1050^{m}), au laboratoire de M. J. Vallot, pendant un mois et demi. Le résultat de ces expériences est résumé par le Tableau ci-dessous :

Calcul de g d'après les expériences.

Jour solaire moyen = 86400″ de temps moyen.
Pendule à Paris : 86400 oscillations par jour moyen.
Pendule à Chamonix : 86400 — 45 = 86355 oscillations.
Pendule à l'Observatoire du mont Blanc : 86400 — 70 = 86330.
Valence d'une oscillation : Paris, $\frac{86400''}{86400^{osc}} = 1''$;
Chamonix, $\frac{86400''}{86353^{osc}} = 1'',000521104$; Observatoire, $\frac{86400''}{86330^{osc}} = 1'',000810842$.
Valeur de g_0 à Paris : Mesure faite à l'Observatoire, 980,94.
Calculée au moyen de la formule $g_1 = 978,1(1 + 0,0052 \sin^2 l)$ avec $l = 48°50'$:

$$\sin 48°50' = 0,752; \quad \sin^2 l = 0,535; \quad 0,0052 \times 0,535 = 0,00278;$$
$$978,1 \times 1,00278 = 980,819; \quad \text{soit } 980,82.$$

Valeur de g_1 à Chamonix, théorique, pour $h_0 = 0$, $l = 45°45'$:

$$\sin 45°45' = 0,716; \quad \sin^2 l = 0,512656; \quad \sin^2 l \times 0,0052 = 0,002666;$$
$$978,1 \times 1,002666 = 980,637; \quad \text{soit } 980,64.$$

Valeur donnée par Hansky, 980,665.
Valeur de g_1 pour Chamonix, théorique, pour $h = 1050^{m}$, $l = 45°45'$: $\frac{1050}{3} = 3,5$.
D'après le nombre calculé par Hansky, 980,665 — 0,35 = 980,315.
D'après le nombre calculé plus haut : 980,64 — 0,35 = 980,29.
Moyenne : 980,3 environ.
Valeur calculée au moyen du pendule :

$$g_1 = g_0 \frac{t_0^2}{t_0^2} = \frac{980,65}{1,00104247} = 979,628; \qquad \text{soit } 979,63.$$

Valeur de g_2 pour l'Observatoire du mont Blanc, pour $h = 4365^{m}$, $l = 45°45'$:
Calculé d'après la formule 980,65 — 1,45 = 979,20;
Calculé d'après la marche du pendule,

$$g_2 = g_0 \frac{t_0^2}{t_0^2} = \frac{980,65}{1,001622337} = 979,08.$$

Valeur de g_3 calculée pour le sommet du mont Blanc, pour $h = 4810^{m}$, $l = 45°45'$:

$$980,665 - 1,6 = 979,065;$$

Calculée par extrapolation du résultat des expériences du pendule; à l'Observatoire Vallot :

$$979,08 - 0,15 = 978,93 \quad (^1).$$

Les chronomètres ont subi également un retard moyen de 30″ par jour, fait difficilement explicable, qui fait l'objet de nouvelles expériences.

Nota. — Je tiens à remercier M. J. Vallot, directeur de l'Observatoire du mont Blanc, d'avoir bien voulu mettre à ma disposition son observatoire pendant 20 ans, ainsi que de sa collaboration dans plusieurs séries d'expériences.

PHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la conception relativiste de l'espace.* Note de M. S. Zaremba, présentée par M. G. Kœnigs.

Dans une Note récente, M. Le Roux [2] a fait remarquer, avec raison, que la simple attribution d'un ds^2 déterminé à l'espace constitue, non pas une hypothèse concernant la nature de celui-ci, mais seulement une convention qui détermine ce que l'on doit entendre par distance de deux points. En revanche, et au point de vue de la théorie de la relativité, il y a intérêt à joindre cette remarque à celle de M. Le Roux, on formulerait une hypothèse susceptible de vérification expérimentale, du moins au cas où l'on adopterait la conception traditionnelle de l'espace-temps, si l'on affirmait que, pour une certaine forme déterminée du ds^2 de l'espace, les corps appelés communément corps solides jouissent de la propriété que les distances géodésiques mutuelles de leurs points, estimées au moyen du ds^2 considéré, sont indépendantes du temps dans certaines conditions (constance de la température et des forces sollicitant le corps).

Ne pourrait-on pas, en profitant de cette remarque, attribuer un sens aux assertions de la théorie de la relativité relatives à la nature de l'espace et discutées par M. Le Roux ?

Cette question comporte une réponse franchement négative. En effet, on admet dans la théorie de la relativité que, parmi les divers systèmes de référence auxquels l'espace-temps peut être rapporté, il y a des systèmes de référence normaux x_1, x_2, x_3, t où l'une des coordonnées, soit t, représente

---

(1) Une seule tentative de mesure de g a été effectuée, en 1898, par M. Hansky, dans l'ancien Observatoire de M. Janssen (*Comptes rendus*, t. 127, 1898, p. 947).

(2) Le Roux, *La courbure de l'espace* (*Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 924).

le temps. Soit

$$(1)\qquad \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}\,dx_i\,dx_k\,t \sum_{\mu=1}^{3} g_{\mu 4}\,dx_\mu\,dt + g_{44}\,dt^2$$

la forme métrique de l'espace-temps pour un certain système de référence normal. A une époque donnée $t = t_0$, le ds^2 de l'espace sera donné par la formule

$$(2)\qquad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} (g_{ik})_{t=t_0}\,dx_i\,dx_k.$$

Soient A et B deux points physiques; leur caractère de points physiques fera que chacun d'eux conservera son individualité à travers le cours du temps. Appelons distance des points A et B, estimée à l'époque $t = t_0$ dans le système de référence considéré, leur distance géodésique correspondant à l'expression (2) du ds^2 de l'espace. Il pourra arriver que cette distance soit indépendante de l'époque à laquelle elle se rapporte, mais cette circonstance ne constituera une propriété *intrinsèque* des deux points A et B que si elle se conserve au passage du système de référence considéré à n'importe quel autre système de référence normal ([1]). En examinant si cette condition est vérifiée, on ne devra pas oublier qu'à des positions simultanées des points A et B dans un système de référence normal correspondront, en général, des positions *non* simultanées dans un autre système du même genre. Cela posé, on constate aisément que, selon la nature de la forme (1), de deux choses l'une : ou bien la constance de la distance de deux points physiques ne peut pas être une propriété intrinsèque de ces deux points, ou bien, si elle peut l'être, ce n'est qu'à la condition que le nombre de degrés de liberté de l'ensemble des deux points soit inférieur au nombre 5.

Je prouve en particulier, dans un Mémoire qui paraîtra prochainement, que, dans le cas de la théorie de la relativité restreinte, les coordonnées $x_i^{(A)}$ et $x_i^{(B)}$ des points A et B sont liées entre elles par des formules de la forme

$$x_i^{(A)} = v_i t + a_i, \qquad x_i^{(B)} = v_i t + b_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où les v_i, les a_i et les b_i sont des constantes. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté du système de deux points est donc égal à zéro.

Il résulte de ce qui précède qu'un système de points physiques de la

([1]) Dans deux systèmes de référence différents, la distance des points A et B peut être différente, quoique indépendante du temps dans chacun d'eux.

nature considéré, même s'il existait, ne pourrait pas servir d'étalon de longueur. Par conséquent, le procédé que nous venons de discuter ne permet pas d'attribuer un sens aux assertions de la théorie de la relativité relatives à la nature de l'espace; pour y arriver, il faut autre chose, mais ce qu'il faut semble bien malaisé à trouver.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur les diagrammes circulaires des systèmes triphasés déséquilibrés et la définition de leur degré de déséquilibrage.* Note [1] de M. **Louis-G. Stokvis**, transmise par M. A. Blondel.

Dans une Note précédente [2], nous avons expliqué que l'on peut remplacer un système triphasé déséquilibré par deux systèmes équilibrés; l'un tournant avec le champ excitateur (système synchrone J_s), l'autre tournant en sens inverse (système inverse J_i). C'est le système synchrone qui représente la marche normale de la machine et celle-ci absorbe ou développe le même couple que si elle débitait ou absorbait le courant du système symétrique J_s. Par un raisonnement analogue à celui développé dans notre Note précédente, nous obtenons, en posant l'équation vectorielle

$$\bar{J}_1 + \bar{J}_2 + \bar{J}_3 = 0$$

et en désignant par J_{s1} le courant synchrone circulant dans la phase I ($\sqrt{-1} = j$), l'expression

$$j J_{s1} \sqrt{3} = - J_3 - J_1 \left[+ \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

Nous avons obtenu précédemment, en désignant par J_{i1} le courant inverse passant dans la phase I,

$$j J_{i1} \sqrt{3} = + J_3 + J_1 \left[+ \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

Nous pouvons donc obtenir (voir la figure) le courant synchrone J_{s1} (au facteur $j\sqrt{3}$ près) comme la résultante du courant $-J_3$ et du courant $-J_1$ retardé de $\frac{\pi}{3}$. Nous faisons donc

$$M_1 O = - J_1 \left[+ \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

---

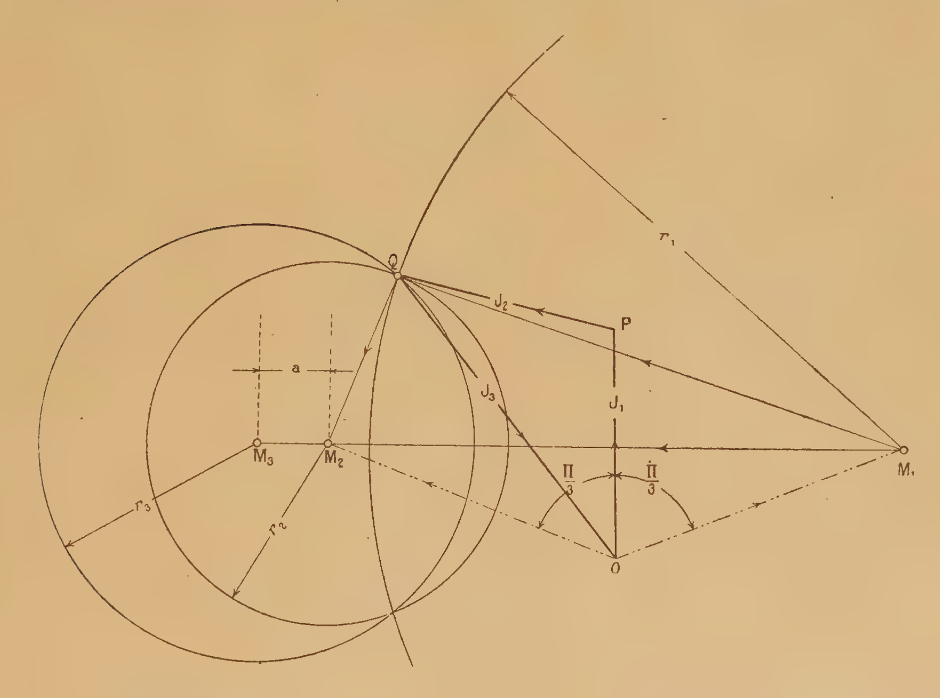
(1) Séance du 22 mai 1922.

(2) *Comptes rendus*, t. 159, 1914, p. 46.

Nous avions obtenu le courant inverse J_{i1} (au facteur $j\sqrt{3}$ près) comme la résultante de J_3 et du courant J_1 avancé de $\frac{\pi}{3}$. Nous faisons donc

$$OM_2 = + J_1\left[+\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

Considérons maintenant le courant J_1 fixe, pour servir de vecteur de réfé-



rence. En avançant ce vecteur de $\frac{\pi}{3}$ ou en le reculant du même angle, les points M_1 et M_2 devront également rester fixes.

Nous obtenons ainsi les relations

$$M_1Q = - J_3 + M_1O = - J_3 - J_1\left[-\frac{1}{2} + j\sqrt{3}\right] = j\sqrt{3}J_{s1},$$

$$QM_2 = + J_3 + OM_2 = + J_3 + J_1\left[+\frac{1}{2} + j\sqrt{3}\right] = j\sqrt{3}J_{i1},$$

$$M_1M_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = j\sqrt{3}J_1.$$

Faisons maintenant trois hypothèses distinctes sur les conditions de fonctionnement :

1° Posons la condition que le courant synchrone reste constant, ce qui

revient à dire : supposons la constance du couple [1]. Alors il est évident que le point Q se meut sur un cercle de centre M_1 et de rayon $M_1Q = \sqrt{3}J_s = r_1$.

2° Posons la condition que le courant inverse reste constant, ce qui revient à dire : exigeons que les harmoniques 3 développées gardent une amplitude constante. La Note citée plus haut nous apprend que le point Q se meut alors sur un cercle de centre M_2 et de rayon $M_2Q = \sqrt{3}J_i = r_2$.

3° Définissons maintenant le degré de déséquilibrage ε comme le quotient de la composante synchrone (c'est-à-dire utile) par la composante inverse (c'est-à-dire nuisible); donc

$$\varepsilon = \frac{J_s}{J_i} = \frac{jJ_s\sqrt{3}}{jJ_i\sqrt{3}} = \frac{QM_1}{QM_2}.$$

Posons la condition que ε soit constant, ce qui revient à dire : cherchons toutes les positions de Q qui donnent lieu au même degré de déséquilibrage. En langage géométrique, cela revient à dire que nous cherchons le lieu géométrique du sommet d'un triangle (M_1M_2Q) dont la base est constante $(M_1M_2 = j\sqrt{3}J_1)$ et dont le quotient des deux côtés est également constant $\left(\frac{QM_1}{QM_2} = \varepsilon\right)$.

Ce lieu géométrique est un cercle dont le rayon est

$$r_3 = \overline{M_1M_2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}\right),$$

et dont le centre se trouve sur la droite M_1M_2 à la distance a de M_2 ou

$$a = M_1M_2\left(\frac{1}{\varepsilon^2 - 1}\right).$$

En résumé, pour un système triphasé déséquilibré, on peut tracer trois diagrammes circulaires :

Un cercle d'équivalence de	couple	ayant pour centre le point	M_1	et pour rayon	$\sqrt{3}J_s$
	harmonique 3		M_2		$\sqrt{3}J_i$
	déséquilibrage		M_3		$\overline{M_1M_2}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)$

[1] Cette propriété découle directement d'un théorème de M. Blondel (voir son Ouvrage *Synchronous Motors*).

CHIMIE PHYSIQUE. — *Influence du facteur temps sur l'interpénétration des solides par réaction chimique.* Note de MM. **H. Weiss** et **P. Henry**, présentée par M. H. Le Chatelier.

Dans une Note précédente [1], nous avons déterminé la loi d'influence du facteur température sur la vitesse d'homogénéisation à l'état solide des alliages Ag + 14 pour 100 Sb hors d'équilibre. Des études faites sur les bronzes à 8 pour 100 d'étain nous ont donné la même loi avec des coefficients légèrement différents ($v = 1,8 . 10^{-15} . 1,0376^{T}$).

Nos nouvelles expériences ont pour but de déterminer la loi d'influence du facteur temps sur ce genre de phénomènes. Réservant, pour des expériences actuellement en cours, l'étude plus délicate de la véritable diffusion à l'état solide entre deux métaux formant une série d'alliages à solutions solides sans lacune de miscibilité, nous nous sommes placés d'abord dans le cas particulier d'une interpénétration de deux métaux, par formation d'une zone de composé défini à partir de leur surface de contact, et nous avons mesuré la loi d'augmentation de l'épaisseur de cette zone avec le temps à diverses températures constantes. Nous nous sommes adressés à deux couples de métaux donnant un composé défini soit coloré naturellement, soit facilement colorable pour un réactif approprié. Ce sont les couples Ag-Sb et Cu-Sb.

Les métaux étaient coulés en cylindres de 6^{mm} de diamètre, leurs bases dressées, polies et forcées l'une contre l'autre à coups de marteau à l'intérieur d'un tube en fer sans soudure, dont la paroi intérieure était recouverte de papier d'amiante pour éviter les réactions possibles du fer. Les échantillons ainsi préparés étaient placés dans un tube de verre où l'on faisait le vide de la trompe à vapeur de mercure et chauffés dans des thermostats pendant des temps déterminés. Pour l'examen, on sciait en deux les cylindres suivant un plan passant par leur axe; l'épaisseur de la couche était mesurée par le déplacement de la platine du microscope nécessaire pour amener successivement les limites des zones devant le réticule de l'oculaire.

Pour grouper les résultats obtenus nous avons été guidés par l'idée théorique suivante. Le temps $d\theta$ nécessaire pour produire une augmentation d'épaisseur dx de la zone se divise en deux parties : 1° la durée de la réaction chimique une fois les molécules des deux métaux mises en contact,

---

[1] *Comptes rendus,* t. 174, 1922, p. 292.

durée qui est évidemment indépendante de l'épaisseur de la couche déjà formée;

2° Le temps nécessaire aux molécules pour traverser la couche déjà formée, temps proportionnel à son épaisseur. Ceci nous donne l'équation différentielle

$$d\theta = (m + nx)\,dx;$$

d'où

$$\theta = mx + \frac{n}{2}x^2.$$

Toutes les expériences que nous avons faites ont conduit à l'adoption d'une expression de la forme

$$\theta = \frac{n}{2}x^2,$$

ce qui semble montrer que la durée de la réaction chimique est négligeable devant la durée de traversée de la couche déjà formée.

Nous n'avons pas constaté, à partir d'une certaine épaisseur de la couche formée, le ralentissement signalé hypothétiquement par certains auteurs à propos de la pénétration du phosphore dans le cuivre [1].

Les points expérimentaux que nous avons obtenus à chaque température se placent presque tous sur deux courbes distinctes, qui sont nettement en relation avec l'intensité des coups de marteau avec lesquels on a établi le contact des deux métaux. Presque aucun point ne vient se placer dans l'intervalle situé entre les deux courbes. L'écrouissage par le choc et la pression de contact jouent certainement un rôle dans le phénomène, mais nous sommes plutôt tentés d'attribuer ces variations discontinues dans les résultats obtenus à des vitesses différentes de traversée, selon l'orientation par rapport au clivage de l'antimoine. Les cristaux d'antimoine auraient une facilité plus grande à s'orienter suivant deux directions déterminées par rapport à ce clivage.

Voici, à titre d'exemple, le tableau de nos résultats pour le couple Ag-Sb à 475° :

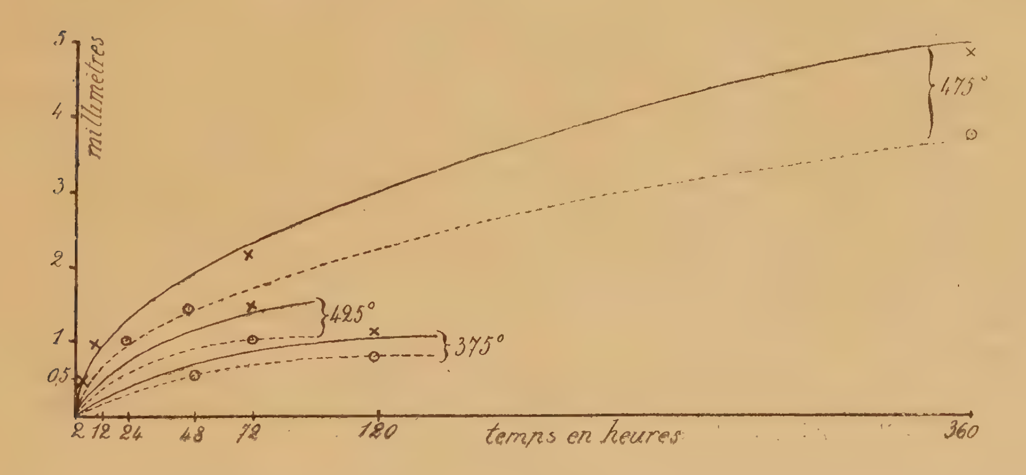
θ (en heures)........	2	12	72	360	24	48	360
x observé (en mm)...	0,38	0,98	2,15	4,9	1,0	1,4	3,75
x calculé (en mm)...	0,376	0,920	2,25	5,04	0,97	1,37	3,75
$\frac{n}{2}$....................	14,2				25,7		
Rapport des $\frac{n}{2}$........	1,8						

[1] Edwards et Murphy, *Inst. of Metals*, 9 mars 1922.

Des tableaux analogues ont été dressés pour le couple Cu-Sb à 440°. Les deux valeurs trouvées pour $\frac{n}{2}$ sont 96 et 207.

Nous avons vérifié d'autre part que n est une fonction de la température de la forme $\frac{1}{K a^T}$, a étant le même pour les deux familles de courbes, mais différent pour les deux couples de métaux (1,02 pour Ag-Sb; 1,018 pour Cu-Sb).

La figure représente les courbes calculées par les formules ci-dessus indiquées pour le couple Ag-Sb. Les points marqués sont les points observés.



Les expériences classiques de Sir Roberts Austen sur la pénétration de l'or dans le plomb sont, ainsi que nous l'avons vérifié directement, des interpénétrations de cette nature. A 200° il se forme en 24 heures une couche du composé Au^2Pb épaisse de $\frac{3}{100}$ à $\frac{4}{100}$ de millimètre. A 218° (3 degrés au-dessus du point eutectique), l'alliage eutectique se forme, fond et la pénétration s'accélère énormément. En un quart d'heure elle est déjà de l'ordre du millimètre. Ces résultats expliquent pourquoi la pénétration de l'or dans le plomb trouvée par Sir Roberts Austen à 250° est de beaucoup supérieure à celle que von Hevezy assigne comme limite supérieure à la pénétration du plomb par son isotope radioactif à 280° (1).

---

(1) *Ann. der Physik*, n° 11, 1921.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Étude de quelques cyanures de benzyle dialcoylés ainsi que des alcools, amides, amines et acides correspondants.* Note [1] de M. **Joseph Blondeau**, présentée par M. A. Haller.

MM. Haller et Bauer et M. Haller et Mme Ramart [2] ont étudié dans différentes conditions la déshydratation du méthyl-2-phényl-2-propanol-1 $C^6H^5-C(CH^3)^2CH^2OH$ qui s'effectue avec transposition moléculaire. Voulant généraliser les résultats qu'ils ont obtenus, nous avons préparé différents homologues supérieurs de cet alcool répondant à la formule générale $C^6H^5C(RR_1)CH^2OH$, R étant égal à C^2H^5 et R_1 à CH^3, C^2H^5, $CH^2-C^6H^5$.

Nous avons obtenu ces alcools en partant des dérivés disubstitués du cyanure de benzyle de formule générale $C^6H^5.C.(R_1.R_2)CN$. Ces nitriles ont été hydratés pour être transformés en amides, puis les amides ont été réduites en alcools correspondants au moyen du sodium et de l'alcool.

Préparation des nitriles : $C^6H^5.C(RR_1).CN$. — Pour préparer ces corps nous avons employé la méthode de MM. Bodroux et Taboury [3] et de MM. Haller et Bauer [4].

Nous ne parlerons pas du diéthylcyanure de benzyle qui a déjà été obtenu par MM. Bodroux et Taboury [5] ainsi que ses dérivés amide [6] et acide [7].

Méthyl-2-phényl-2-butane-nitrile-1 ou méthyléthylcyanure de benzyle

$$C^6H^5-C(CH^3)(C^2H^5)CN.$$

Pour préparer ce nitrile on a traité l'éthylcyanure de benzyle en présence d'éther par les quantités théoriques d'amidure de sodium et d'iodure de méthyle. Le produit de la réaction, après avoir été séché a été ensuite de nouveau traité par moitié des quantités théoriques d'amidure de sodium et d'iodure de méthyle afin de se rapprocher le plus possible d'une méthylation totale. Le méthyléthylcyanure de benzyle ne peut en effet être séparé de l'éthylcyanure de benzyle par distillation, ces deux corps bouillant à la même température.

---

(1) Séance du 15 mai 1922.

(2) Haller et Bauer, *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 1584; Haller et Mme Ramart, *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 1211.

(3) Bodroux et Taboury, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 531.

(4) Haller et Bauer, *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 1581.

(5) Bodroux et Taboury, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 1241.

(6) Bodroux et Taboury, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, t. 7, p. 670.

(7) Bodroux et Taboury, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, t. 7, p. 847.

Le méthyléthylcyanure de benzyle est un liquide incolore bouillant à 119°-120° sous 15mm et à 239° n. c. à la pression ordinaire.

Phényl-2-benzyl-2-butane-nitrile-1 ou éthylbenzylcyanure de benzyle

$$C^6H^5 - C(C^2H^5)(CH^2 - C^6H^5)CN.$$

Nous l'avons préparé en benzylant l'éthylcyanure de benzyle. C'est un liquide très visqueux, bouillant à 201° sous 17mm.

Saponification des nitriles. — La saponification de l'éthylcyanure de benzyle effectuée au moyen de la potasse et de l'alcool amylique donne l'amide correspondante avec seulement des traces d'acide. Le diéthylcyanure de benzyle se comporte de même. Le méthyléthylcyanure de benzyle donne au contraire un mélange d'amide et d'acide. Nous avons pu obtenir cette amide avec un bon rendement en saponifiant le nitrile par l'acide sulfurique à 85 pour 100 à la température de 100°.

La méthyl-2-phényl-2-butyramide ou méthyléthylphénylacétamide

$$C^6H^5 - C(CH^3)(C^2H^5) - CONH^2$$

forme de petites aiguilles blanches fondant à 74°. Elle est très soluble dans la plupart des solvants organiques.

La phényl-2-benzyl-2-butyramide ou éthylphénylbenzylacétamide

$$C^6H^5C(C^2H^5)(CH^3 - C^6H^5)CONH^2$$

constitue des cristaux fondant à 119°. Elle est assez peu soluble dans la plupart des solvants organiques.

L'acide méthyl-2-phényl-2-butanoïque ou acide méthyléthylphénylacétique

$$C^6H^5C(CH^3)(C^2H^5)CO^2H$$

fond à 60°. Il est très soluble dans la plupart des solvants organiques. Éthérifié par saturation de sa solution alcoolique au moyen de l'acide chlorhydrique gazeux, il donne avec l'alcool méthylique un *éther méthylique*, liquide incolore bouillant à 120° sous 16mm. Avec l'alcool éthylique on obtient un *éther éthylique*, liquide incolore distillant à 124°-125° sous 14mm.

L'acide phényl-2-benzyl-2-butanoïque ou acide éthylphénylbenzylacétique

$$C^6H^5.C(C^2H^5)(CH^2 - C^6H^5)CO^2H$$

a été obtenu avec un rendement théorique par saponification de l'amide correspondante par l'acide chlorhydrique en solution acétique et en tube scellé. Il fond à 140°. Des essais d'éthérification de cet acide par saturation de ses solutions alcooliques au moyen de l'acide chlorhydrique gazeux ne nous ont donné aucun résultat. Nous avons cependant obtenu un *éther méthylique* en passant par le chlorure acide. Cet éther distille à 196°-197° sous 16mm et forme des cristaux fondant à 61°.

Réduction des amides. — Nous avons réduit au moyen du sodium et de l'alcool absolu les deux amides que nous avons décrites ci-dessus, ainsi que la diéthylphénylacétamide.

L'éthyl-2-phényl-2-butanol-1 ou alcool diéthylphényléthylique

$$C^6H^5 - C.(C^2H^5)^2.CH^2OH,$$

obtenu avec un rendement de 45 à 50 pour 100 par réduction de la diéthylphénylacétamide, est un liquide visqueux, bouillant à 136°-137° sous 13^{mm} et à 260°-261° n. c. à la pression ordinaire.

Traité par le chlorure de benzoyle en présence de pyridine, il fournit un *dérivé benzoylé*, liquide très visqueux distillant à 210° sous 18^{mm}. Avec l'isocyanate de phényle il donne une *phényluréthane* qui forme de petites aiguilles blanches fondant à 70°.

Le *méthyl-2-phényl-2-butanol-1* ou alcool méthyléthylphényléthylique primaire $C^6H^5 - C.(CH^3)(C^2H^5)CH^2OH$ est obtenu, avec un rendement de 55 pour 100, par réduction de l'amide correspondante. C'est un liquide visqueux bouillant à 138° sous 23^{mm} et à 246° n. c. à la pression ordinaire.

Cet alcool fournit un *dérivé benzoylé* qui distille à 202°-204° sous 12^{mm} et forme de gros cristaux fondant à 46°. Sa *phényluréthane* est un produit extrêmement visqueux.

Le *phényl-2-benzyl-2-butanol-1* ou alcool éthylphénylbenzyléthylique primaire $C^6H^5 - C.(C^2H^5)(CH^2 - C^6H^5)CH^2OH$ est obtenu avec un rendement de 83 pour 100 par réduction de l'amide correspondante. C'est un liquide très visqueux bouillant à 11° sur 17^{mm}. Son *dérivé benzoylé* n'a pas cristallisé. Sa *phényluréthane* forme de petites aiguilles fondant à 117°.

L'*éthyl-2-phényl-2-butane amine* ou diéthylphényléthylamine

$$C^6H^5 - C(C^2H^5)^2CH^2NH^2$$

se forme en très petite quantité dans la réduction de l'amide correspondante. Nous l'avons obtenu également par réduction du diéthylcyanure de benzyle au moyen du sodium et de l'alcool absolu. C'est un liquide incolore, d'odeur plutôt agréable, absorbant fortement l'anhydride carbonique de l'air, distillant à 137°-139° sous 23^{mm}. On obtient son *chlorhydrate* par passage d'un courant d'acide chlorhydrique gazeux dans sa solution éthérée. On peut faire cristalliser celui-ci dans l'alcool absolu.

La *méthyl-2-phényl-2-butane amine* ou méthyléthylphényléthylamine

$$C^6H^5 - C(CH^3)(C^2H^5)CH^2NH^2$$

s'est formée avec un rendement de 2,5 pour 100 dans la réduction de l'amide correspondante. Elle distille à 112°-113° sous 11^{mm}. Ses propriétés et celles de son *chlorhydrate* sont analogues à celles de l'amine précédente.

La *phényl-2-benzyl-2-butane amine* ou éthylphénylbenzyléthylamine

$$C^6H^5 - C(C^2H^5)(CH^2 - C^6H^5)CH^2NH^2$$

a été obtenue avec un rendement de 4 pour 100 dans la réduction de l'amide correspondante. C'est un liquide incolore bouillant à 193° sous 10^{mm}. Nous avons obtenu son *chlorhydrate* de la même façon que les précédents.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur l'action de l'acétylène sur les cétones sodées et la préparation des dialcoyléthinylcarbinols.* Note [1] de MM. **R. Locquin** et **Sung Wouseng**, présentée par M. A. Haller.

Divers auteurs, dont MM. Ruzicka et Fornasir [2], ont déjà signalé qu'il se forme des alcools tertiaires acétyléniques quand on fait passer de l'acétylène dans quelques méthylcétones en solution dans un solvant indifférent et en présence d'un agent de condensation comme l'éthylate ou l'amidure de sodium.

Un des inconvénients de cette manière d'opérer est que la plus grande partie du gaz acétylène s'échappe avec l'ammoniac qui se dégage. D'autre part, en raison du manque d'homogénéité de la masse, l'opération est extrêmement lente : il faut des semaines pour obtenir une quantité appréciable de produit.

Nous avons pensé qu'il devait être possible d'améliorer le mode opératoire en préparant d'abord le dérivé sodé des cétones et en faisant ensuite agir sur lui le gaz acétylène.

Le résultat a pleinement confirmé notre attente, surtout à partir de la pinacoline ou des cétones qui, conformément aux observations de M. Haller [3], donnent aisément et régulièrement un dérivé sodé

$$\begin{matrix} R\diagdown \\ R''-CH\diagup\!\!\diagup \end{matrix} C-O\,Na$$

en milieu éthéré ou benzénique.

Ayant préparé de cette manière le dérivé sodé de différentes cétones, nous avons soumis la bouillie brute elle-même à l'action de l'acétylène purifié. Il est avantageux d'agiter violemment et continuellement, de rester à une température voisine de 0° C et d'opérer en vase clos sous une pression d'au moins $\frac{1}{2}$ atmosphère en sus de la pression atmosphérique. Dans ces conditions, l'acétylène est rapidement absorbé : on peut en fixer, sans perte, jusqu'à 11^l par heure sur une molécule-gramme de pinacoline sodée en suspension dans environ 250^{cm^3} d'éther anhydre.

Quand l'absorption du gaz est terminée, on verse la masse dans l'eau glacée, etc. et sépare finalement par rectification l'alcool tertiaire acétylénique qui a pris naissance

(1) Séance du 22 mai 1922.

(2) Ruzicka et Fornasir, *Helvetica chimica Acta*, t. 2, fasc. 2, 1919, p. 182.

(3) A. Haller, *Comptes rendus*, t. 150, 1910, p. 582. Voir aussi t. 140, 148, 149, etc.

conformément aux équations

$$\begin{matrix}R\\R'\end{matrix}\!\!>CO + NH^2Na \rightarrow \begin{matrix}R\\R''-CH\end{matrix}\!\!>C-ONa + NH^3,$$

$$\begin{matrix}R\\R''-CH\end{matrix}\!\!>C-ONa + CH\equiv CH \rightarrow \begin{matrix}R\\R''-CH\end{matrix}\!\!>C<\begin{matrix}ONa\\C\equiv CH\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}R\\R'\end{matrix}\!\!>C<\begin{matrix}OH\\C\equiv CH\end{matrix}$$

. . . .

Les alcools acétyléniques tertiaires ainsi obtenus (que nous appellerons *dialcoyléthinylcarbinols*) sont des liquides mobiles, éthérifiables, caractérisables parfois par leurs *phényluréthanes* et, mieux encore, par leurs *allophanates* préparés selon les indications de M. Béhal [1]. Ces alcools donnent instantanément un dérivé argentique inaltérable dans l'eau bouillante. Hydrogénés en présence de noir de platine ou de nickel réduit, ils conduisent à l'alcool tertiaire *saturé* identique à celui que fournit directement l'action du bromure d'éthyle-magnésium sur la cétone considérée.

Remarque. — En dehors des dialcoyléthinylcarbinols en question, qui constituent le produit principal de la réaction, on recueille un peu de carbure et de cétone inaltérée ou régénérée, ainsi qu'une certaine quantité des produits de condensation de cette dernière sur elle-même quand il y a lieu, puis viennent des *γ-glycols bitertiaires acétyléniques* du type

$$\begin{matrix}R\\R'\end{matrix}\!\!>C(OH)-C\equiv C-C(OH)<\begin{matrix}R\\R'\end{matrix}$$

existant généralement sous deux modifications stéréoisomériques *a* et *b*. Ils sont identiques à ceux qu'on obtient par la méthode de Iotsich [2] en condensant les dibromomagnésiens de l'acétylène avec les mêmes cétones initiales.

On trouvera dans le Tableau ci-dessous les constantes des principaux produits que nous avons obtenus :

Cétones initiales.	*Produits obtenus.*
Méthylisohexylcétone (Éb. = 162°-163°).	Méthylisohexyléthinylcarbinol : $Éb._{10} = 83°-85°$ et 187°-188° sous 760^{mm}. Son allophanate fond à 114°-115°. — Méthyléthylisohexylcarbinol : $Éb._{15} = 92°-93°$. Son allophanate fond à 110°-111°. — γ-glycols bitertiaires acétyléniques : $Éb._{12} = 183°-184°$. (*a*) fond à 66°-68°; (*b*) fond vers 35° sans netteté.
Méthylnonylcétone ($Éb._{10} = 108°-110°$).	Méthylnonyléthinylcarbinol : $Éb._{11} = 127°-128°$. Son allophanate est pâteux. — Méthyléthylnonylcarbinol : $Éb._{14} = 131°-134°$. — γ-glycols bitertiaires acétyléniques : $Éb._{10} = 237°-238°$. (*a*) fond à 91°-92°; (*b*) fond à 70°-71°.

---

(1) A. Béhal, *Bull. Soc. chim.*, 4e série, t. 25, 1919, p. 452 à 473.

(2) Iotsich, Extrait *Bull. Soc. chim.*, 3e série, t. 30, 1905, p. 210.

Cétones initiales.	*Produits obtenus.*
Dipropylcétone (Éb. = 142°-144°).	Dipropyléthinylcarbinol : Éb.$_{12}$ = 69°-71°. D_4^{11} = 0,8691 ; N_D^{11} = 1,4443. R. M. obs. = 43,28 ; R. M. calc. = 43,32. Son allophanate fond à 143°. — Dipropyléthylcarbinol : Éb.$_{16}$ = 78°-79°. Son allophanate fond à 124°. — γ-glycol acétylénique bitertiaire unique : Éb.$_{18}$ = 174° fondant à 118°-119°.
Méthyltert. butylcétone (Éb. = 104°-105°).	Méthyltert. butyléthinylcarbinol : Éb. = 142°-144°. D_4^{11} = 0,8806 ; N_D^{11} = 1,4441. R. M. obs. = 38,02 ; R. M. calc. = 38,66. Son allophanate fond à 156°. — Méthyltert. butyléthylcarbinol : Éb. = 152°. Son allophanate fond à 134°-135°. — γ-glycols bitertiaires acétyléniques : Éb.$_{14}$ = 148°-150°. (*a*) fond à 88°-89° ; (*b*) fond à 78°.

BIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur l'hérédité du sexe chez la Lychnide dioïque* (Lychnis vespertina *Sibthorp*). Note de M. **L. Blaringhem**, présentée par M. L. Guignard.

Les néomendéliens soutiennent une théorie de la répartition des sexes chez les espèces dioïques obéissant aux règles numériques de l'hérédité mendélienne. Les zoologistes (L. Doncaster, R. Goldschmidt, T.-H. Morgan et beaucoup d'autres) en trouvent des exemples devenus classiques chez les Papillons et les Mouches; le botaniste Correns (1907) a réalisé l'expérience fondamentale, répétée par Bateson (1909) d'après laquelle tous les ovules de *Bryonia dioica* sont à tendance femelle, les pollens mi-partie à tendance femelle, mi-partie à tendance mâle. La preuve en est donnée par la fécondation de *Bryonia dioica* femelle avec le pollen de *B. alba* hermaphrodite; en première génération, tous les hybrides sont femelles; les hybrides étant stériles, on n'a pu suivre la deuxième génération.

Les conclusions sont discutées par Strasburger (1910), surtout à propos d'une série de travaux de G. Shull (1909-1914) concernant la transmission des sexes à partir d'une mutante hermaphrodite du *Lychnis vespertina*. Shull prétend qu'ici encore les individus femelles sont homozygotes et à ovules femelles, les mâles et hermaphrodites à pollen mi-partie mâles, mi-partie femelles. Strasburger, Correns, E. Baur et d'autres ont étudié la transmission de la sexualité chez cette dernière espèce sans aboutir à une conclusion précise. Le fait que l'*Ustilago antherarum* provoque l'apparition d'étamines chez la femelle (castration parasitaire de A. Magnin, A. Giard),

dont Strasburger a fait une étude anatomique remarquable, inquiète ceux qui voudraient ne trouver aucune tendance à la masculinité chez les individus homozygotes femelles.

Les essais que j'ai tentés de 1910 à 1912, à l'imitation de Correns, avec la Lychnide, n'ont rien de probant; comme ceux de Correns, de Strasburger, de Shull, ils donnèrent des pourcentages variables, dont l'interprétation pouvait être discutée. Reprenant ces recherches en 1920, j'ai eu la chance d'opérer avec un individu femelle, *Lychnis vespertina* Sibthorp, du Laboratoire de Chimie végétale de Meudon, qui se comporte à peu près comme la Bryone de Correns, mais dont la descendance hybride est fertile, ce qui me permet d'examiner le problème sous un jour nouveau.

Le 6 mai 1920, j'isolai une trentaine de fleurs strictement femelles; le 21 mai, j'en fécondai 5 avec le pollen de 2 fleurs mâles, rouges, d'un *Lychnis sylvestre* Roehl du Muséum, et 3 avec le pollen de 2 fleurs hermaphrodites du *Lychnis viscosa*. Les 8 ovaires gonflèrent et prirent la taille normale; seules, les fécondations par le *sylvestre* donnèrent de bonnes graines [environ 400 (lot A) pour 5 fruits, alors que 5 fruits à fécondation libre donnent 600 graines].

Le 23 juillet 1920, la même plante mère fut fécondée avec le pollen d'un *Melandrium rubrum* mâle, récolté à Varangeville (Seine-Inférieure) et, de 3 fruits noués, j'obtins environ 120 graines (lot B); à la même date, je fécondai 4 fleurs avec le pollen d'une même fleur de *L. vespertina* croissant près de la plante mère; j'en obtins plus de 250 graines (lot C).

Une partie des graines fut semée sur couche froide en mars 1921; le 15 juillet, je notai avec étonnement que *toutes les plantes en fleurs* (environ 40) de ces expériences *étaient femelles*. Je mis immédiatement en culture la majeure partie des graines encore disponibles, et la plupart fleurirent en novembre, confirmant le fait; les statistiques définitives n'ont pu être faites qu'au début de mai 1922 :

Lot.	Semées.	Repiquées.	♀.	♂.	♀ pour 100.
A. *L. vespertina* × *L. sylvestre*...	250	140	114	1	99+
B. » × *M. rubrum*...	114	90	72	3	96
C. » × *L. vespertina*..	185	120	71	4	95

Deuxième génération. — Les plantes du premier semis A donnèrent leurs premières fleurs en juillet 1921, et toutes étaient femelles; j'isolai et fécondai artificiellement 5 hybrides à fleurs roses et 5 à fleurs blanches avec le pollen de 3 plantes *vespertina* croissant à l'emplacement même de la femelle utilisée en 1920; les graines furent récoltées à part, semées fin octobre 1921 et les plants, protégés sous châssis, sont tous actuellement en fleurs; sur 895 plantes dérivées, 423 sont femelles, 472 sont mâles. Les pourcentages de femelles oscillent pour les 10 séries entre 31 et 66, sans liaison marquée ni avec les coloris des fleurs (rose ou blanc) des ascendants F_1, ni avec les parents mâles *vespertina* au nombre de 3.

Il apparaît d'autre part clairement, d'après la variété des tons roses et les pourcentages des blancs et des roses en F_1 et F_2, que *le caractère couleur de la corolle ne suit pas* dans sa transmission *une ségrégation mendelienne* simple (fait déjà noté par Correns et par Shull). Il ne subsiste, dominant tout le phénomène, que la presque complète production de femelles dans la descendance immédiate de la plante isolée en 1920.

Tout se passe chez ce *Lychnis vespertina* comme chez certains individus femelles de *Satureia hortensis* (Correns). L'hérédité du sexe, chez le *Lychnis dioica* et chez plusieurs autres Caryophyllées d'ailleurs (*Silene, Dianthus*), est une propriété de lignée; certaines plantes ne donnent que des descendants femelles ou presque; croisées avec d'autres, la tendance s'évanouit immédiatement ou presque. Mais il ne paraît pas impossible de fixer des lignées à tendance marquée femelle, ou même à tendance hermaphrodite (mutation hermaphrodite du *Lychnis dioica* de Shull), ou à tendance presque exclusivement mâle. Les déductions tirées de l'expérience de Correns avec *Bryonia dioica* × *B. alba* ont paru très simples parce que, cet hybride étant stérile, on n'a pu en étudier la descendance; mais *il paraît dangereux d'en faire le prototype d'un mode général de la transmission des sexes, alors qu'il n'est qu'un cas particulier.*

BIOLOGIE. — *Sur la fécondité des Hybrides obtenus par le croisement du Canard Pilet mâle* (Dafila acuta *L.*) *et du Canard sauvage femelle* (Anas boschas *L.*). Note de M. A. **Lécaillon**, présentée par M. Henneguy.

Dans une Note récente (¹) j'ai décrit les caractères d'un Hybride mâle résultant du croisement d'un Canard Pilet mâle et d'un Canard sauvage femelle. A l'état libre, les deux espèces dont il s'agit s'accouplent facilement, tout comme lorsqu'elles sont en captivité. Dans l'Ouvrage d'André Suchetet (²), il est donné, en effet, une liste d'une trentaine d'exemplaires d'Hybrides semblables à celui que j'ai décrit et qui sont répartis dans les Musées ou les collections particulières d'Italie, de Belgique, de Hollande, de Russie, d'Angleterre et d'Amérique. Le Muséum de Paris en possède deux exemplaires, dont l'un depuis l'année 1838, et l'autre depuis 1854.

(¹) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 885.

(²) *Les Hybrides à l'état sauvage*, t. 1, p. 117, Lille, 1896.

Mais ces Hybrides présentent un caractère remarquable au sujet duquel je n'ai trouvé jusqu'ici aucune indication dans les Ouvrages qui ont signalé leur existence, et que mes observations ont mis en relief, ils donnent, en s'accouplant avec le Canard sauvage, de nouveaux Hybrides. Et ceux-ci, en s'accouplant entre eux, produisent de même une troisième catégorie d'Hybrides. On sait qu'en général les Hybrides animaux sont inféconds, et que ce cas est aussi celui des Mulards (provenant de l'accouplement du Canard de Barbarie et du Canard domestique). Les Hybrides de Canard Pilet et de Canard sauvage font donc exception à la règle générale et ce sont, par suite, des sujets particulièrement précieux pour l'étude des phénomènes d'hérédité.

Les produits dérivés de l'accouplement primitif entre un mâle de Pilet et un Canard sauvage femelle, que j'ai obtenus jusqu'ici, au Jardin zoologique de Toulouse, et dont j'ai pu étudier les caractères morphologiques externes et les caractères éthologiques, se répartissent en trois catégories :

1° Hybrides issus directement de l'accouplement des deux parents d'espèces différentes : trois exemplaires, dont un mâle vivant encore actuellement;

2° Hybrides provenant de l'union du mâle hybride précédent avec la femelle de Canard sauvage ci-dessus : 12 exemplaires, dont 6 (3 mâles et 3 femelles) encore vivants aujourd'hui;

3° Produits provenant de l'accouplement entre eux des Hybrides de deuxième catégorie : plusieurs pontes ont eu lieu cette année ou sont actuellement en cours. Je me suis assuré que les œufs nouvellement pondus étaient fécondés, puis qu'après une période d'incubation ils contenaient des embryons.

Enfin l'éclosion d'une ponte a déjà eu lieu et donné cinq jeunes Hybrides de troisième catégorie.

On pourrait se demander si le Canard Pilet et le Canard sauvage, qui donnent ainsi entre eux des produits féconds, ne constituent pas en réalité simplement deux races d'une même espèce. En zootechnie, où l'on a généralement l'habitude de regarder comme espèce unique toutes les races qui donnent entre elles des produits féconds, on donnerait le nom de *métis* aux produits que j'appelle ici *hybrides*. Mais les objections à cette manière de voir ne manquent pas; en particulier on peut faire valoir le fait que, entre les Canards Pilet et les Canards sauvages, des différences importantes et constantes s'observent toujours, à tel point qu'on les range ordinairement

dans deux genres distincts. Pour l'étude de l'hérédité, les produits qui dérivent de l'union de ces deux sortes d'Oiseaux ne pourraient d'ailleurs rien perdre de leur importance suivant que l'on définirait l'espèce et la race d'une manière ou d'une autre.

ENTOMOLOGIE. — *Étude mathématique de l'action des parasites entomophages. Durée du cycle parasitaire et accroissement de la proportion d'hôtes parasités.* Note de M. **W.-R. Thompson**, présentée par M. P. Marchal.

J'ai démontré dans une première Note ce qui suit : en admettant que le nombre initial d'hôtes soit n; le nombre initial de parasites, p; la puissance reproductrice de l'hôte par génération, h; la puissance reproductrice du parasite par génération, s; le nombre total d'hôtes produits par génération, lh, où l est un nombre dont la valeur dépend de la proportion qui existe entre les sexes; le nombre total de parasites produits par génération, fs, où f est un facteur numérique semblable à l; en admettant enfin que le parasite ne dépose qu'un seul œuf dans chaque hôte attaqué et n'attaque que les individus non parasités; alors, le nombre d'hôtes dans la $t^{\text{ième}}$ génération est donné par la formule

$$(1) \qquad H_t = (nh^t l - psh^{t-1} f - ps^2 h^{t-2} f - \ldots \text{ à } t \text{ termes})$$

ou bien

$$(2) \qquad H_t = \left\{ nh^t l - pshf \left[\frac{s^{t-1} - h^{t-1}}{(s-h)} \right] \right\},$$

le nombre de parasites étant donné par la formule

$$(3) \qquad P_t = ps^t f.$$

Si la puissance reproductrice du parasite est égale à celle de l'hôte, nous devons écrire dans la formule (1), $s = h$; cette formule devient alors

$$(4) \qquad H_t = [nh^t l - ph^t f(t-1)].$$

Nous avons aussi

$$(5) \qquad P_t = ph^t f.$$

Maintenant, si, dans ce dernier cas, nous désirons savoir combien de générations il faudra pour que le parasite arrive à exterminer son hôte,

nous n'avons qu'à poser $H_t = P_t$, et ensuite déterminer t, c'est-à-dire

$$ph^t f = [nh^t l - ph^t f(t-1)],$$

d'où

(6) $$t = \frac{nl}{pf}.$$

Si la puissance reproductrice du parasite est supérieure à celle de l'hôte, nous pouvons écrire, dans les formules (1) et (3), $s = ah$, où a est un constant numérique supérieur à 1; substituant dans les formules, nous obtenons enfin

(7) $$H_t = h^t \left\{ nl - pf \left[\frac{a(a^{t-1}-1)}{a-1} \right] \right\},$$

(8) $$P_t = pa^t h^t f.$$

En posant $H_t = P_t$, nous avons à la fin de l'opération

(9) $$t = \frac{\log\left(\frac{nla - nl + pfa}{pfa}\right)}{\log a}.$$

Si la puissance reproductrice du parasite est inférieure à celle de l'hôte nous écrirons, de la même façon, $sa = h$, d'où

(10) $$H_t = s^t \left[nla^t - \frac{pfa^t(1-a^{1-t})}{a-1} \right],$$

$$P_t = ps^t f,$$

et, enfin,

(11) $$t = \frac{\log\left(\frac{pf}{nl + pf - nla}\right)}{\log a}.$$

Les formules qui donnent, dans ces divers cas, le pourcentage de parasitisme (α) dans la $t^{\text{ième}}$ génération peuvent être obtenues facilement :

Si la puissance reproductrice est égale à celle de l'hôte, nous avons de (4) et (5)

(12) $$\alpha = \frac{100\,pf}{nl - pf(t-1)};$$

si la puissance reproductrice du parasite est supérieure à celle de l'hôte, nous avons, de (7) et (8),

(13) $$\alpha = \frac{100\,pa^t f}{nl - pf\left[\frac{a(a^{t-1}-1)}{a-1}\right]},$$

ou, enfin, si la puissance reproductrice du parasite est inférieure à celle de l'hôte, de (3) et (10),

$$\alpha = \frac{100\,pf}{nla^t + \frac{pfa^t(1-a^{1-t})}{a-1}}. \tag{14}$$

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Le rendement énergétique dans la croissance de l'*Aspergillus niger. Note de MM. **Émile-F. Terroine** et **René Wurmser**, présentée par M. Guignard.

Dans une Note précédente [1], nous avons désigné sous le nom de « rapport d'utilisation » le rapport du poids sec d'*Aspergillus* formé au poids de glucose disparu du milieu de culture. Ce rapport reste constant, au voisinage de 0, 44, tant que l'on fait varier la vitesse dans des limites relativement étroites, en modifiant la température. Il n'en est plus de même quand on réussit à faire varier bien plus largement la vitesse. Nous montrerons plus loin le parti que l'on peut tirer de ce fait dans l'étude du développement de l'*Aspergillus* au point de vue énergétique.

La disparition de 1^g de glucose est accompagnée de la formation de $0^g,44$ de mycélium. Supposons tout d'abord que le glucose soit complètement brûlé; nous pouvons calculer le rendement énergétique, de manière approchée, au moyen des données thermochimiques. La combustion à la bombe du mycélium dégage $4^{cal},8$ par gramme; la combustion du glucose $3^{cal},76$ par gramme : le rendement énergétique semble donc être d'environ $\frac{4,8\times 0,44}{3,76}$, soit 0,56.

En fait, la combustion du glucose contenu dans le milieu de culture n'est pas complète. On trouve dans le liquide, après le développement, des acides organiques, de l'urée, etc. Il est donc nécessaire de mesurer directement l'énergie U disparue du milieu. Nous avons brûlé, avant et après le développement, l'extrait sec du milieu de culture; la différence représente l'énergie U. Le mycélium recueilli sur filtre est séché et brûlé; soit U' le nombre de calories dégagées. Enfin on recueille dans de la baryte titrée le gaz carbonique qui se dégage pendant le développement; le nombre de centimètres cubes dégagés, multiplié par 0,005, donne en calories l'énergie U″ correspondant à la formation de CO^2 aux dépens du glucose. Le Tableau ci-dessous indique les résultats.

Combustion du milieu initial.	Combustion du résidu.	U.	U'.	CO^2 dégagé en centimètres cubes.	U″.	U — (U' + U″).
6,46	0,510	5,95	3,55	408,8	2,04	0,36
6,00	0,125	5,87	3,48	401,0	2,00	0,39

(1) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 482.

Il est donc possible de calculer le rendement énergétique, lequel est représenté par le rapport entre l'énergie emmagasinée dans le mycélium U′ et l'énergie métabolisable U. Ce rendement est respectivement dans les deux expériences rapportées ci-dessus de 59,6 et 59,2 pour 100.

Mais il est évident qu'un tel calcul ne donne qu'un rendement apparent, en ce qui regarde la croissance. Pour atteindre le rendement réel, il faut défalquer de la quantité totale d'énergie disparue du milieu celle qui a servi à couvrir la dépense d'entretien, dépense obligatoire même en l'absence de tout développement.

Dans ce but, nous avons tenté de distinguer, dans la totalité du CO^2 produit, la part qui représente la dépense d'entretien, de celle qui doit être réellement attribuée aux processus de croissance.

Si l'on place un mycélium dans un milieu de Czapek uniquement salin, sans carbone ni azote, il ne peut se développer, mais continue à dégager du CO^2. En recueillant le gaz, nous avons trouvé que la respiration d'entretien, à 36°, est en moyenne de 3^{cm^3} par gramme de mycélium sec et par heure. Retranchant de U l'énergie R correspondant à cette production de CO^2, on trouve que le rendement devient 0,63 et 0,67. Mais nous n'avons ici qu'une valeur minima de l'énergie d'entretien de l'*Aspergillus*; car le mycélium, sur milieu non nutritif, paraît entrer dans un état de vie ralentie.

Nous avons obtenu la mesure du CO^2 correspondant à l'entretien, dans les conditions mêmes de la croissance, en faisant varier considérablement la vitesse du développement. En milieu très acide ($P_H = 1,5$ environ), le mycélium croît très lentement; le rapport d'utilisation s'abaisse. La consommation du glucose est, en effet, à tout instant, la somme de deux termes :

1° Un terme proportionnel à la vitesse du développement et qui représente la quantité de glucose qui doit disparaître pour que se forme la substance du mycélium; 2° un terme proportionnel au poids du mycélium déjà formé à ce moment, et qui représente la consommation d'entretien. On déduit immédiatement ([1]) que la quantité de glucose consommée au bout d'un temps t est représentée par la relation

$$c = p\left(a + \frac{1}{2} b t\right),$$

([1]) Nous considérons, ce qui est exact en dehors des premières heures du développement, que le poids du mycélium formé est proportionnel à l'âge de la culture.

où p est le poids sec récolté, et a et b des constantes dont l'une représente la consommation nécessaire pour former 1^g de mycélium, et b la consommation d'entretien par gramme de mycélium et par heure. Soit alors c_1 la consommation qui accompagne la production de p grammes de mycélium en t_1 heures, et c_2 le chiffre correspondant à la production du même poids p en t_2 heures, on a

$$b = 2\frac{c_2 - c_1}{p(t_2 - t_1)}.$$

La moyenne de cinq expériences a fourni pour b la valeur de $8^{cm^3},2$ CO^2 par gramme de mycélium et par heure. Le rendement $\frac{U'}{U - R}$, calculé d'après cette donnée, atteint 66 pour 100 et 70 pour 100; c'est dire que le rendement énergétique réel de la croissance de l'*Aspergillus* est extrêmement élevé. Le fait que Fingerling, Köhler et Reinhardt ont obtenu des valeurs du même ordre de grandeur dans le cas de la croissance du Porc, amène à se demander, et nos recherches se poursuivent dans ce sens, si tous les êtres hétérotropes n'obéissent pas à une même loi énergétique.

MÉDECINE. — *Expériences sur l'introduction de l'ion iode par électrolyse chez l'homme, et son élimination par les urines.* Note de MM. **Georges Bourguignon** et **Conduché**, présentée par M. d'Arsonval.

En étudiant la libération des cicatrices adhérentes par l'introduction électrolytique de l'ion iode, l'un de nous [1] a montré que les résultats les meilleurs sont obtenus en localisant le plus possible le courant au foyer de la blessure. Il a constaté, en outre, que l'amélioration se poursuit quelque temps après l'arrêt de l'ionisation et que, sur les sujets porteurs de cicatrices multiples, le traitement localisé à une seule cicatrice améliore en même temps, quoique à un degré moindre, toutes les autres.

Pour étudier le déterminisme de ces phénomènes nous avons cherché comment s'élimine chez l'homme normal l'ion iode introduit quotidiennement par électrolyse, et quelle quantité peut en introduire un courant rigoureusement déterminé.

Négligeant l'élimination par la salive qu'a démontrée Brillouet par des expériences purement qualitatives, nous avons d'abord recherché un

---

(1) G. Bourguignon et M. Chiray, *Société méd. des hôp.*, 13 octobre 1916; *Presse médicale*, 3 août 1916.

procédé de dosage de l'iode dans les urines : une calcination en milieu basique constitue un procédé sensible et précis, qui permet de détruire toute la matière organique.

L'iode est mis en liberté par quelques gouttes de sulfate de nitrosyle en solution sulfurique et on l'extrait par le sulfure de carbone. La coloration violette permet de reconnaître l'iode qu'on peut doser par décoloration avec une solution d'hyposulfite de concentration croissante. Pratiquement, on peut ainsi doser moins de $\frac{1}{10}$ de mg d'iode par litre d'urine. Nous avons contrôlé notre méthode à plusieurs reprises en ajoutant à une urine normale quelques milligrammes d'iode, à l'état d'iodure, que nous avons retrouvés sans pertes. L'urine normale de l'un de nous, sujet des expériences, ne contenait que des traces d'iode inférieures à $\frac{1}{10}$ de milligramme par 24 heures, variant légèrement avec l'alimentation.

Dans les expériences d'ionisation, la vessie est vidée immédiatement avant chaque séance, l'urine des 24 h. est recueillie exactement dans l'intervalle des séances et l'iode y est dosé tous les jours. Chaque séance dure 30 minutes. L'intensité est maintenue constante à 10 mA., grâce à une résistance en série de 10000^{ω}.

L'électrode positive est constituée par une plaque de charbon et 20 à 25 rondelles de papier-filtre à analyse, de 7^{cm} de diamètre, mouillées d'eau distillée; elle était placée à la face postérieure de l'avant-bras gauche. L'électrode négative était une électrode semblable, mouillée d'une solution de KI à 1 pour 100 et placée à la face interne du bras du même côté dans une 1re série (6 séances); dans une 2e série (14 séances) elle était constituée par un cristallisoir contenant une quantité mesurée au ballon jaugé (150^{cm^3}) d'une solution de KI à 1 ou 2 p. 1000. Le sujet plongeait le poing dans le cristallisoir où le courant arrivait par une plaque de charbon. Il s'est éliminé de $6^{mg},3$ à 8^{mg} d'iode par jour dans la 1re série et 5^{mg} à $7^{mg},6$ dans la 2e. En calculant la quantité totale d'iode introduite dans les urines en prenant pour les vitesses des ions I et K à travers la peau, les valeurs de 5,6 et 4,8 qui résultent des données de Stéphane Leduc, l'iode retrouvé dans les urines représente 65 pour 100 de la quantité introduite dans la première série et 42,6 pour 100 dans la deuxième.

Pour contrôler ce rapport, nous avons cherché, dans notre deuxième série, à substituer à ce procédé de dosage, un peu hypothétique, un dosage direct de l'iode disparu à l'électrode négative.

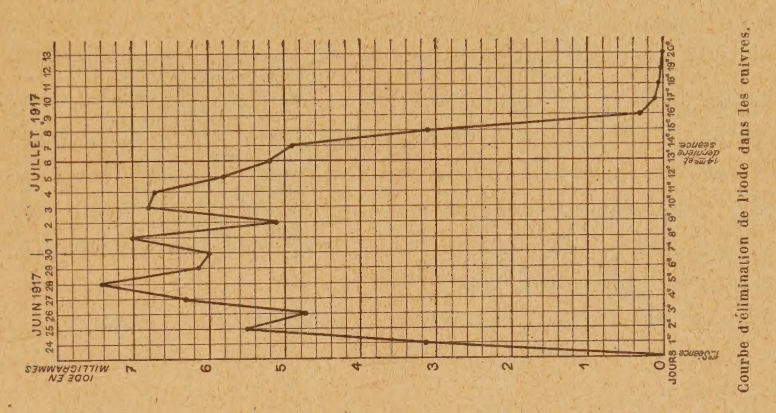
En étudiant la courbe ci-jointe de l'élimination de l'iode avec des séances quotidiennes d'ionisation, on voit qu'il faut deux séances pour arriver à une élimination sensiblement constante tous les jours; après la dernière séance, l'élimination s'est continuée plusieurs jours (4 à 5 jours). On distingue donc trois phases : 1° une phase d'élimination croissante; 2° une phase d'élimination en plateau; 3° une phase d'élimination décroissante. Le dosage de l'iode disparu n'a jamais donné moins de 5^{mg} et jamais plus de $7^{mg},6$ d'iode dans l'urine des 24 heures; à la période de plateau nous avons trouvé de 5^{mg} à $7^{mg},4$ d'iode disparu. Il y a donc une concordance

très satisfaisante entre l'iode disparu et l'iode éliminé dans les urines des 24 h. En comparant les quantités d'iode disparues à l'électrode négative, et éliminées, on voit que l'on retrouve dans les urines environ 70 à 80 p. 100 de l'iode introduit. Voici un exemple de cette expérience :

29 JUIN. — Iode disparu du cristallisoir après une séance de 30 minutes avec 10 m A = 7^{mg},6.

30 JUIN. — Iode trouvé dans l'urine des 24 heures = 6^{mg}, soit 79 p. 100.

Si l'on applique à cette expérience le calcul de Stéphane Leduc, on



Courbe d'élimination de l'iode dans les cuivres.

trouve 10^{mg},1 d'iode introduit. Il y a un écart de 33 pour 100 entre le calcul et le dosage direct, et le rapport entre l'iode introduit ainsi calculé et l'iode éliminé est de 59 pour 100 au lieu de 79 pour 100. Le dosage direct est donc le seul qui permette de connaître réellement la quantité introduite. Pour le même nombre de coulombs, cette quantité varie avec les régions de la peau et peut-être avec d'autres conditions à préciser expérimentalement. Nos expériences démontrent aussi que la plus grande partie de l'iode introduit par électrolyse s'élimine par les reins ($\frac{3}{4}$ à $\frac{4}{5}$ environ).

Nous avons aussi essayé, dans quelques expériences, de voir si l'on peut extraire de l'iode à l'électrode positive. De fait, en mouillant les papiers-filtre de l'électrode positive avec de l'empois d'amidon fait avec de l'eau distillée, nous n'avons le plus souvent obtenu aucun bleuissement. Ce résultat est en accord avec les expériences des auteurs qui, avant nous, ont fait la même expérience dans des conditions rigoureuses. Mais, à deux reprises, il s'est produit une petite brûlure sous l'électrode, et, dans ces deux expériences, aussi rigoureusement préparées que les autres, le papier à l'empois a bleui sur une surface de même grandeur et de même forme que la brûlure.

Si l'empois ne bleuit pas, en général, ce n'est donc pas parce qu'on n'extrait pas d'iode, mais parce que les quantités extraites sont en trop faible

concentration. Dans le cas de la brûlure, la densité du courant est plus grande au niveau de la petite lésion, et la concentration de l'iode qui sort à ce niveau devient suffisante pour que la réaction s'y produise.

En résumé, nos expériences démontrent que dans l'introduction électrolytique de l'iode, il se constitue une réserve d'iode qu'on peut supposer s'accumuler dans le corps thyroïde et qu'ensuite il s'établit un équilibre entre l'iode qui entre au pôle négatif et qui sort au pôle positif pendant la séance, celui qui est en circulation, celui qui est en réserve et celui qui s'élimine par les reins dans l'intervalle des deux séances. A l'arrêt de l'ionisation, la réserve s'élimine en quelques jours. Ces faits permettent de faire une hypothèse plausible sur le mécanisme d'action de la thérapeutique par ionisation d'iode, et d'expliquer les faits cliniques observés par l'un de nous. L'élimination plus lente de l'iode introduit par électrolyse, que de l'iode introduit par la bouche, montre que sous cette forme l'iode s'incorpore mieux à l'organisme. En même temps elle explique la prolongation des améliorations pendant les arrêts de traitement.

La présence d'iode en circulation (extraction à l'électrode positive) explique l'action à distance et permet de comprendre l'action locale prépondérante.

Puisqu'il est démontré (Stéphane Leduc et autres auteurs) que l'ion introduit passe dans la circulation et ne pénètre que peu profondément dans la peau, l'action locale ne peut s'expliquer que par l'électrolyse interpolaire de l'iode en circulation sur le trajet des lignes de force. L'ionisation agirait donc en deux temps : *Premier temps*, introduction de l'ion. *Deuxième temps*, localisation sur le tissu à traiter de l'ion libéré par électrolyse de celui que contient la circulation.

Ces faits justifient la technique de l'ionisation avec petites électrodes et localisation du courant aussi étroite que possible au foyer de la lésion.

La séance est levée à 16 heures trois quarts.

É. P.